

Exercice (1)

Soit f une application définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$

☺ résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$.

f est-elle injective ?

☺ montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq 0$. f est-elle surjective ?

☺ soit g la restriction de f sur \mathbb{R}^+ . Montrer que g est bijective de \mathbb{R}^+ vers $[0,1[$ puis définir sa réciproque g^{-1}

Exercice (2)

Soit f l'application définie de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

1) on pose $A = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ déterminer $f^{-1}(A)$. f est-elle surjective ?

2) prouver que $f(\mathbb{R}^+) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$

3) soit g l'application définie de \mathbb{R}^+ vers $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par : $g(x) = f(x)$

a) montrer que g est injective

b) déduire que g réalise un bijection \mathbb{R}^+ vers $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et définir g^{-1}

exercice (3)

on considère l'application f telle que : $f(x) = \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$

1) vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ que peut-on déduire ?

2) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \leq \frac{1}{4}$. f est-elle surjective de \mathbb{R} vers \mathbb{R}

Exercice (4)

Soit l'application $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$
 $(x, y) \rightarrow 2x + y$

1) montrer que f est surjective non injective

2) on pose $A = \{-1, 2\}$ déterminer $f(A \times A)$

3) déterminer $f^{-1}(\{0\})$

Exercice (5)

Soit f une application de E vers F , A et B deux parties de F

1) prouver que $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$

2) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

3) montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Exercice (6)

On pose $I =]0, +\infty[$. on considère l'application f définie

de $I \times I$ vers $I \times I$ par : $f((x, y)) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$

1) prouver que f est injective

2) montrer que f est bijective puis définir sa réciproque

Exercice (7)

E un ensemble non vide A une partie de E et soit f l'application définie

de $P(E)$ vers $P(A)$ par : $f(X) = X \cap A$

☺ déterminer $\Gamma = \{X \in P(E) / f(X) = X\}$ et prouver que f est surjective

☺ déterminer $f(\bar{A})$ puis montrer que f n'est pas injective