

EXERCICES DE REVISION SUR LIMITES ET DERIVATION

Exercice 1

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = -x^2 - 5x - 1$.

- 1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
- b) Dresser le tableau de variation.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1

Corrigé de l'exercice 1

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$
- 2) $f'(x) = -2x - 5$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{21}{4}$	$-\infty$

- 3) $f'(1) = -7$ donc la tangente a pour équation $y = -7x + b$
 De plus $f(1) = -7$; donc $-7 = -7 \times 1 + b \Rightarrow b = 0$
 La tangente a pour équation : $y = -7x$

Exercice 2

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$.

- 1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
- b) Dresser le tableau de variation.

Corrigé de l'exercice 2

- 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$
- 2) $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Etudions le signe $x^2 - 2x - 3$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow 17/3$	$\searrow -5$	$\nearrow +\infty$	

Exercice 3

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$.

- 1.a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)$ et $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)$. Préciser le signe de $(x+2)$ en fonction de x .
- c) En déduire les limites suivantes: $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$.
- d) Montrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes.
- 2.a) Calculer la dérivée.
- b) Dresser le tableau de variation.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0

Corrigé de l'exercice 3

$$1.a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} (2x+5) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$$

Si $x < -2$ alors $x+2 < 0$ et si $x > -2$ alors $x+2 > 0$

$$c) \text{D'où: } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$$

d) Les droites d'équation $x = -2$ et $y = 2$ sont asymptotes à la courbe.

2)

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+5) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
f	2		$+\infty$
		$-\infty$	2

3) $f'(0) = -\frac{1}{4}$ donc la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{4}x + b$

De plus $f(0) = \frac{5}{2}$; donc $\frac{5}{2} = -\frac{1}{4} \times 0 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

La tangente a pour équation : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition E de f et les limites aux bornes de E .

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe C représentative de f .

2) Montrer que pour tout x de E , il existe trois réels a , b et c tels que f peut s'écrire

sous la forme: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

3) a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g définie sur E par: $g(x) = f(x) - (ax + b)$

b) Soit D la droite d'équation $y = ax + b$ (elle est appelée asymptote oblique).

Étudier les positions relatives de D et C .

4) a) Calculer la dérivée.

b) Étudier son signe.

5) Dresser le tableau de variation

Corrigé de l'exercice 4

1) a) Limites aux bornes.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

On remarque que $(x + 1)$ change de signe en -1 , on va être amené à séparer l'étude de la limite en -1 en deux cas.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 5) = 9 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

b) Puisque $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe C représentative de f .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = ax^2 + (a+b)x + b+c$$

Par identification des coefficients des termes de même puissance, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-3 \\ b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=9 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} = x - 4 + \frac{9}{x+1}}$$

3.a) $g(x) = f(x) - (x - 4) = \frac{9}{x+1}$

On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

b) La droite D d'équation $y = x - 4$ est appelée asymptote oblique à la courbe.

Pour étudier la position relative de D et C , on étudie le signe de $g(x) = \frac{9}{x+1}$

Le signe de $\left(\frac{9}{x+1}\right)$ ne dépend que du signe de $(x+1)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x) = \frac{9}{x+1}$		-	+
Positions relatives de D et C	C est au-dessous de D		C est au-dessus de D

4.a) Dérivée

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x+5) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$$

b) Etudions le signe de x^2+2x-8

$$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4 \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

5)

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	\nearrow	-11	\searrow	$-\infty$	$+\infty$
				1		

Voici la courbe qui traduit tout le travail précédent.

