III. Applications de la fonction dérivée deuxième :

A. Position relative de la tangente et la courbe – la concavité :

a. Propriété et définition :

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

- La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes des points x tel que $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives . on note $\smile$

$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :

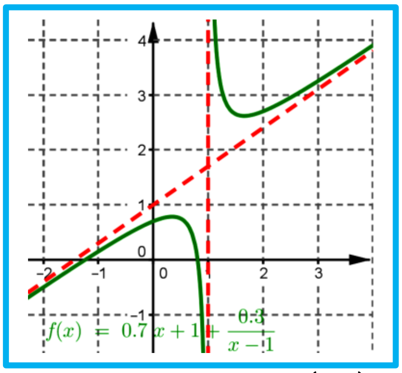
- La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes des $x \in I$.

Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives . on note $\frown$.

b. Exemple :

Exemple 1 :

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f .



- Sur l'intervalle $]1,+\infty[$: la courbe (C_f) de f est convexe .

  (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés positives) .
- Sur l'intervalle $]-\infty,1[$: la courbe (C_f) de f est concave .

  (ou sa concavité est dans le sens des ordonnés négatives) .

Exemple 2 :

Le tableau ci-contre représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
Concavité de (C_f)		$\frown$		$\smile$	‖	$\frown$		$\smile$	

B. Points d'inflexions :

a. Propriété et définition :

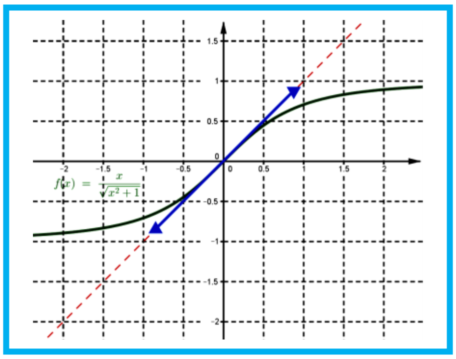
f est une fonction dérivable deux fois sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d' inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.

b. Exemple :

Exemple 1 :

- Soit la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



Exemple 2 :

Le tableau suivant représente le signe de la fonction dérivée seconde de f et la concavité de la courbe (C_f) de f

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$-$	
Concavité de (C_f)		$\frown$		$\smile$	‖	$\frown$		$\frown$	

- Le point d'abscisse $x_0=-5$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car $f''(-5)=0$ et f'' change de signe au voisinage de $x_0=-5$.
- Le point d'abscisse $x_1=2$ n'est pas un point d'inflexion au courbe (C_f) de f car f'' change de signe au voisinage de $x_1=2$

IV. Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

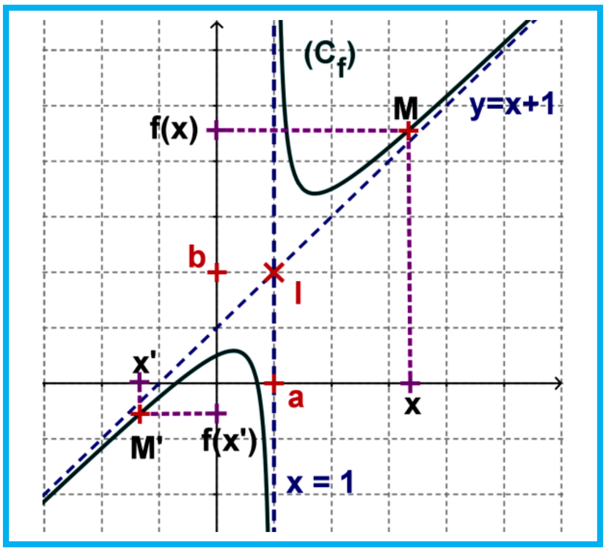
A. Centre de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie au courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in D_f \ ;\ 2a-x\in D_f \\ \forall x\in D_f \ ;\ f(2a-x)+f(x)=2b \end{cases}$

b. Exemple :



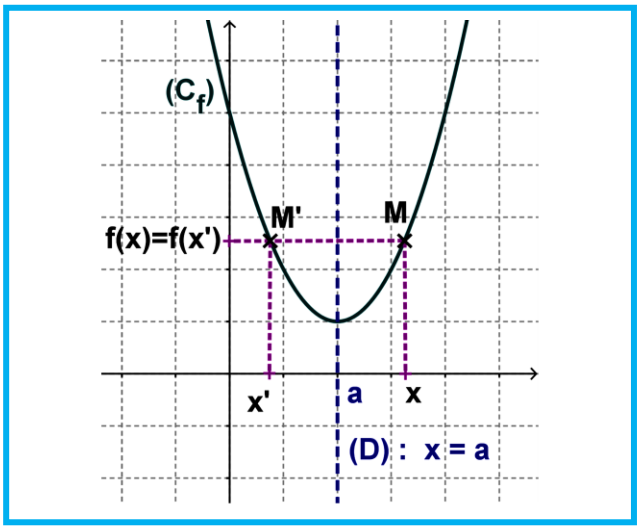
B. axe de symétrie de la courbe d'une fonction :

a. Propriété :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La droite d'équation $D: x=a$ est axe de symétrie au courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ ; \ 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ ; \ f(2a-x)=f(x) \end{cases}$

b. Exemple :



V. Branches infinies d'une fonction :

A. Branches infinies :

a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si au moins une des coordonnées d'un point M de la courbe de (C_f) tend vers l'infinie on dit que la courbe (C_f) admet une branche infinie .

B. Asymptote verticale :

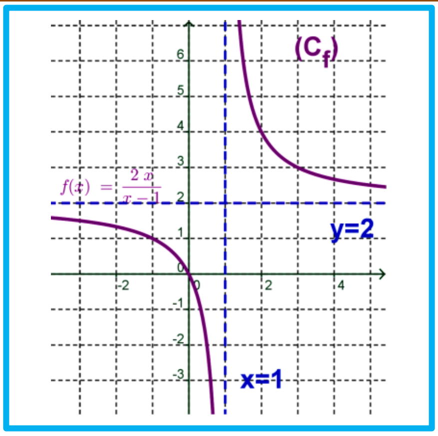
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à (C_f) (à droite de a ou à gauche de a) .

b. Exemple :

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$.



C. Asymptote horizontale :

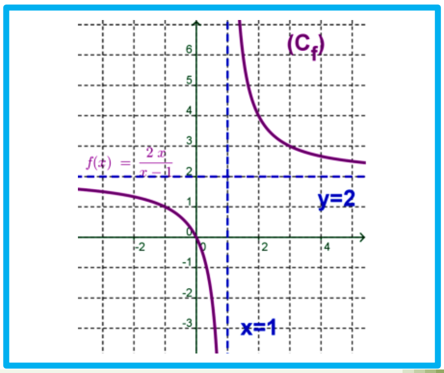
a. Définition :

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $([a,+\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty,a[\subset D_f)$ dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$) alors la droite d'équation $y = b$ (ou $y = c$)est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

b. Exemple :

Asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$.



D. Asymptote oblique :

a. Définition :

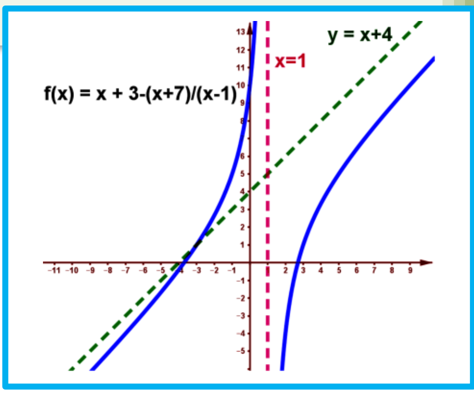
- Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction définie sur D_f (tel que $([a,+\infty[\subset D_f$ ou $]-\infty,a[\subset D_f)$ dans un plan (P) est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- $a \in \mathbb{R}^*$ ($a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$) et $b \in \mathbb{R}$

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$.

b. Exemple :

Soit $f(x) = x + 3 - \dfrac{(x+7)}{(x-1)}$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = x + 3$ voisinage de $\pm\infty$



c. **Propriété :**

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $\pm\infty$, donc pour déterminer a et b on calcule les limites suivantes :

- Pour déterminer a on calcule : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ (c.à.d. $a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$) , donc on a deux cas particulières .
- Pour déterminer a on calcule : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$ (c.à.d. $b \neq \pm\infty$) . donc on a la troisième cas particulière .
- **Les cas particulières**

➢ 1ère cas particulière : $a = \pm\infty$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des ordonnés .

➢ 2ième cas particulière : $a = 0$ on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) l'axe des abscisses .

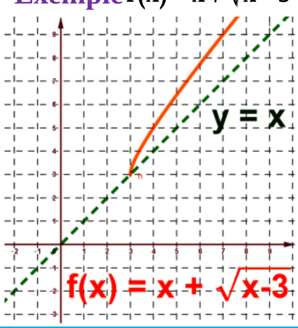
➢ 3ième cas particulière : $b = \pm\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, on dit que (C_f) admet une branche parabolique de direction (B.P.D) la droite d'équation $y = ax$.

les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

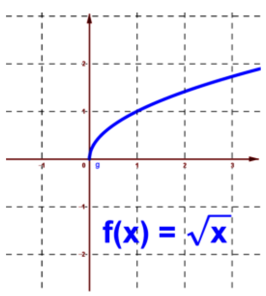
Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

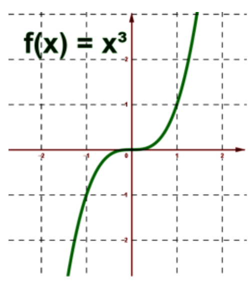
Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnés

Exemple $f(x) = x^3$



VI. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .(complément)

a. **Définition :**

f est une fonction dérivable au point a

- La fonction u tel que : $u : x \to f(a) + (x-a)f'(a)$ (ou encore $(x - a = h)$; $v : h \to f(a) + hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .

- Quand x est très proche de a le nombre $f(a)+(x-a)f'(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x) \approx f(a)+(x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a)+hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$ avec $x-a=h$.

A. Exemple :

❖ **Exemple 1 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x)=x^2$ et $a=1$.

Correction :

f est une fonction dérivable au point 1 avec $f'(1)=2$ approximation affine de $f(1+h)$ est :

$f(1+h) \approx hf'(1)+f(1) \approx 2h+1$. **Conclusion :** $f(1+h)=(1+h)^2 \approx 2h+1$.

Application du résultat :

On prend $h=0,001$ d'où : $f(1,001)=f(1+0,001) \approx 2\times 0,001+1$ donc $f(1+0,001) \approx 1,002$.

On vérifie : $f(1,001)=(1,001)^2=1,002001$ donc $1,002 \approx 1,002001$.

Technique de calcule : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h+1$.

❖ **Exemple 2 :** Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

Correction :

On pose $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=9$ et $h=0,002$ d'où $\sqrt{9,002}=f(9+0,002)$. On calcule $f'(9)$ on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(9+h)-f(9)}{h}=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R} \text{ d'où } f'(9)=\frac{1}{6}.$$

On trouve une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

On a : $f(a+h) \approx f(a)+hf'(a)$ d'où $f(9+0,002) \approx f(9)+0,002\times f'(9)$.

Donc : $f(9+0,002) \approx \sqrt{9}+0,002\times\frac{1}{6}$ par suite $f(9+0,002) \approx 3,000333333$.

On remarque que $\sqrt{9,002} \approx 3,000333333$ la calculatrice donne : $\sqrt{9,002} \approx 3,000333315$ d'où la précision est 3×10^{-8} .

1. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x)=x^2$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^2 \approx 1+2h$.
- Pour la fonction : $f(x)=x^3$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^3 \approx 1+3h$.
- Pour la fonction : $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\frac{1}{1+h} \approx 1-h$.

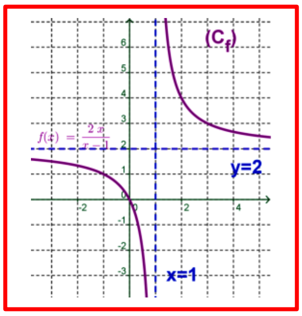
VII. Résumer des branches infinies :

Asymptote horizontale

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$



Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

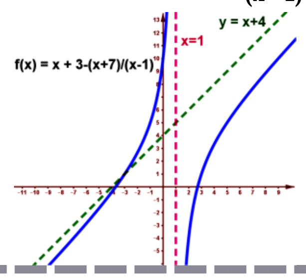
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = b \in \mathbb{R}$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation y=ax+b voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + 3 - \dfrac{(x+7)}{(x-1)}$



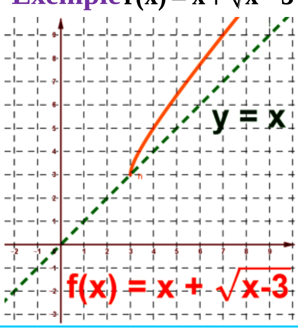
Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax+b)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = \pm\infty$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$

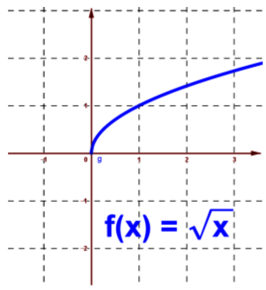


$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$

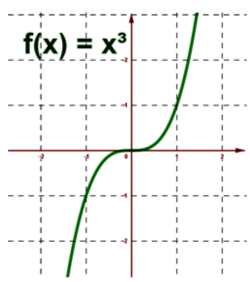


$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnés

Exemple $f(x) = x^3$



les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)

Asymptote verticale

$\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$