18-2019	Devoir 3	1er BAC SM

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

(C) sa courbe dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) montrer que le domaine de f est $D=\left]-\infty,0\right]\cup\left]1,+\infty\right[$

b) calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat

c) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) $y=x+\dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$

d) montrer que (D) $y=-x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$

2) montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{f(x)}{x}=0$

donner une interprétation géométrique du résultat

3) a) montrer que $(\forall x\in D-\{0\})$ $f'(x)=\dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$

b) dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C)

Exercice 2

(I) 1) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) $11x-17y=1$

2) montrer que $4^6\equiv1\ [13]$ et déduire que $13\mid 1+2019^{2019}$

(II) Soit n un entier naturel .

On pose : $a=n^3-n^2-12n$ et $b=2n^2-7n-4$

1) vérifier que $n-4\mid a$ et $n-4\mid b$

2) on considère les nombres $a'=2n+1$; $b'=n+3$

soit d un diviseur commun de a' et b'

a) montrer que $a'\wedge b'=(n-2)\wedge5$ en déduire les valeurs possible de d

b) déterminer n pour que $a'\wedge b'=5$

3) montrer que $n\wedge(2n+1)=1$

4) déterminer suivant n le pgcd de a et b

Exercice 3

Soit $(U_n)_n$ la suite réelle définie par : $U_0=\dfrac{1}{4}$ et $U_{n+1}=\left(\sqrt{U_n}-U_n\right)^2$

1) a) calculer U_1 et montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $0<U_n<1$

b) montrer que $(U_n)_n$ est décroissante

2) montrer que $\sum\limits_{k=0}^{k=n} U_k=\dfrac{1}{2}-\sqrt{U_{n+1}}$

3) on considère la suite $(V_n)_n$ définie par : $V_0=\sqrt{2}$ et $V_{n+1}=\dfrac{V_n}{\sqrt{1+U_nV_n^2}}$

a) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $V_n>0$ puis étudier la monotonie de $(V_n)_n$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\dfrac{1}{V_{n+1}^2}-\dfrac{1}{V_n^2}=U_n$

c) déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ $V_n=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{U_n}}}$