

Exercice 1

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 ; U_1 = 2 \\ 6U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) on pose $2V_n = 2U_{n+1} - U_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite

géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$

1.5 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2U_{n+1} = U_n + 5\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

1 pt

2) on pose $W_n = U_n - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite géométrique

de raison $q' = \frac{1}{2}$

1.5 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1 pt

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k = \frac{7}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

1.5 pt

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

et on pose $I = [1, 2]$

1) a) montrer que $(\forall x \in I) \quad f(x) \in I$

1 pt

b) résoudre dans I l'équation $f(x) = x$

1 pt

2) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = f(U_n)$$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq U_n \leq 2$

1 pt

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4} \left|U_n - \sqrt{2}\right|$$

1 pt

c) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left|U_n - \sqrt{2}\right| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

1 pt

3) on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$ montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left|S_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{4}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

1.5 pt

4) on pose $W_n = \frac{U_n - \sqrt{2}}{U_n + \sqrt{2}}$

a) montrer que $(W_n)_n$ est une suite

géométrique de raison $q = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

1 pt

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{n+2} + (1 - \sqrt{2})^{n+2}}{(\sqrt{2} + 1)^{n+2} - (1 - \sqrt{2})^{n+2}} \times \sqrt{2}$$

1 pt

BONUS

Soit $(X_n)_n$ la suite réelle définie par : $X_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2}{3^k}$

1) calculer X_1 et X_2

1.5 pt

2) montrer que $(X_n)_n$ est croissante

0.5 pt

3) a) montrer par récurrence que :

$$(\forall p \geq 3) \quad 2^{p+1} > p^2$$

1.5 pt

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad X_n \leq \frac{23}{9}$

1.5 pt

On pose : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$; $V_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k}$

$$\text{et} \quad W_n = \sum_{k=3n+1}^{k=5n+1} \frac{1}{k}$$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n \geq \frac{1}{2}$

2 pts

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad W_n < \frac{2}{3}$

2 pts

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad U_n < \frac{3}{4}$

2 pts