2018-2019	Contrôle $N°1$	Groupe scolaire GAUSS

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=\frac{x+2}{x}$ et $g(x)=x^2+2x$

Partie (1)

1) a) dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g (1.5 pt)

b) quelle est la nature des courbes (C_f) ; (C_g) et leurs éléments caractéristiques (1.5 pt)

2) a) résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ (1 pt)

b) en déduire que (C_f) et (C_g) se coupent en trois points à déterminer (1 pt)

3) a) tracer dans un même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les deux courbes (C_f) et (C_g) (2 pts)

b) résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{2}{x}\geq(x+1)^2-2$ (1.5 pt)

Partie (2)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x)=f(x) & si\ x\notin[-2,1] \\ F(x)=g(x) & si\ x\in[-2,1] \end{cases}$

1) a) dresser le tableau de variation de F (1 pt)

b) tracer dans un repère $(O',\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction F (1.5 pt)

2) discuter suivant m le nombre de solutions de l'équation $F(x)=m$ (1.5 pt)

3) on pose $h(x)=\frac{1}{x}$

a) résoudre dans $\mathbb{R}^*$: $-2\leq\frac{1}{x}\leq1$ (1.5 pt)

b) exprimer $(F\circ h)(x)$ en fonction de x (2 pts)

Exercice 2

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=E(2x)-E(x)-E\left(x+\frac{1}{2}\right)$

1) vérifier que $T=1$ est une période de G (1 pt)

2) exprimer $G(x)$ dans chacun des intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2},1\right[$ (1.5 pt)

3) en déduire que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $E(x)+E\left(x+\frac{1}{2}\right)=E(2x)$ (1.5 pt)

Exercice « bonus »

1) Soient a et b deux réels strictement positifs . Montrer que $\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{b^4+a^2}\leq\frac{1}{ab}$

2) a ; b et c trois réels strictement positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1)=8$ montrer que $abc\leq1$