

DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets.

I. Ensemble fini : introduction

1) Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble **fini** et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note : $\text{Card}(E)=n$

Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

2) L'ensemble vide, noté \emptyset est un ensemble de cardinal 0 : $\text{card}\emptyset = 0$

3) Soit un A ensemble Si $\text{card}A = n$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors il existe une bijection entre A

et l'ensemble $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ donc on peut écrire l'ensemble

A sous forme : $A = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

4) Soient A et B deux ensembles finis

$\text{card}A = \text{card}B$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B

Propositions : Soient E et F deux ensembles finis

1) $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

2) Si E et F sont disjoints ($E \cap F = \emptyset$) alors :

$\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)$

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'ensembles disjoints deux à

deux ($X_i \cap X_j = \emptyset$ si $(i \neq j)$) alors :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \text{card}(X_i)$$

3) Si $E \subseteq F$ alors : $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$ et

$$\text{card}(F - E) = \text{card}(C_F^E) = \text{card}(F) - \text{card}(E)$$

II. Théorème fondamental du dénombrement

Si un événement C_1 peut se produire de n_1 façons différentes

et un événement C_2 peut se produire de n_2 façons

différentes et ... et un événement C_p peut se produire

de n_p façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

Alors : Le total n des possibilités de l'événement combiné $C_1, C_2; \dots; C_p$ est le produit des possibilités de chaque événement. Cad : $n_1 \times n_2 \times n_3 \dots \times n_p$

Propositions : Soient A et B deux ensembles finis et non

vides : $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \times \text{card}B$

III. le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soient M et N deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de N dans M est :

$$(M^N)^{\text{card}N} = m^n \text{ avec : } \text{card}M = m \text{ et } \text{card}N = n$$

IV. L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et non vide et $\text{card}E = n$ $n \in \mathbb{N}$

et soit $P(E)$ l'ensembles des parties de E on a :

$$\text{card}P(E) = 2^n$$

V. Arrangements

1) Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E C'est-à-dire : un élément de la forme :

$$(x_1; x_2; \dots; x_p) \in E \times E \times \dots \times E = E^p$$

et dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

2) Arrangements avec répétitions

2-1 Définition : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts. On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E.

2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p .

3) Arrangements sans répétitions

3-1 Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note : A_n^p et est égal à :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

VI. Permutations

1) permutations sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de

permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n!** (**factorielle n**) défini par

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

2) permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, \dots, n_k fois, avec

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a :

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!} \quad (P_n \text{ permutations avec répétitions})$$

VII. Combinaisons

1 Définition : Soit E un ensemble non vide de n éléments ($n \neq 0$) :

Et un entier $p : 0 \leq p \leq n$

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E .

Remarque : « combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.

(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments)

2 Propriété : Quels que soient les entiers naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$ on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p et on a :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} \quad \text{et on a aussi : } C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_n^0 = 1 ; C_n^1 = n ; C_n^n = 1$$

• Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :

$$C_n^0 = 1 \text{ (L'ensemble vide)}$$

• Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est : $C_n^1 = n$ (les singletons)

• Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est : $C_n^n = 1$ (L'ensemble E)

Synthèse :

Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1) L'ordre des éléments est-il important ?

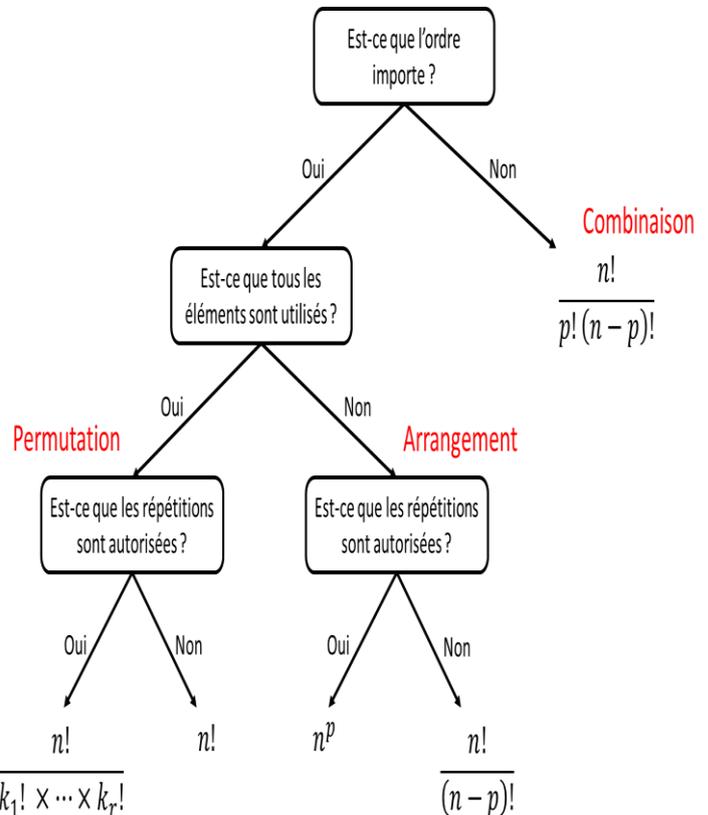
- Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.
- Si non il s'agit de combinaisons.

2) Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

- Si non il s'agit d'arrangements.
- Si oui il s'agit de permutations.

3) Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces différentes alternatives.



3) Propriétés : Quels que soient les entiers naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n$ on a :

$$1) C_n^p = C_n^{n-p} \quad 2) C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Preuve : 1) on a $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

2) Soit E un ensemble fini de cardinal n . $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in E$

Le nombre de combinaisons de E de p éléments est la somme des combinaisons de E de p éléments qui contiennent a qui ne contiennent pas a

$$\text{Donc : } C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau est appelé le Triangle de Pascal.

VIII. Formule du binôme de Newton

Proposition : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$