Cours DENOMBREMENT PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

avec Exercices avec solutions

DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets.

I.Ensemble fini : introduction

Définition : Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble fini et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le cardinal de E, on le note : Card(E)=n

Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

Exemples :1)A = {1, 2}, B = {a, b, c}

Card(A)=2 et card(B)=3

2) $A=\left\{E\left(\frac{11}{n}\right);n\in\mathbb{N}^*\right\}$

A est un ensemble fini : $A=\{0;1;2;3;5;11\}$ et $cardA=6$

Remarques :

1°L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est un ensemble de cardinal 0 : $card\varnothing=0$

2°Soit un A ensemble Si $cardA=n$ et $n\in\mathbb{N}^*$ alors il existe une bijection entre A et l'ensemble $\{1;2;3;...;n\}$ donc on peut écrire l'ensemble A sous forme :

$A=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$

3°Soient A et B deux ensembles finis

$cardA=cardB$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B

Propositions : Soient E et F deux ensembles finis

1) $card(E\cup F)=card(E)+card(F)-card(E\cap F)$

2) Si E et F sont disjoints $(E\cap F=\varnothing)$ alors :

$card(E\cup F)=card(E)+card(F)$

Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une famille d'ensembles disjoints deux a deux ($(X_i\cap X_j=\varnothing)$ si $(i\ne j)$) alors :

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{i=n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n}card(X_i)$$

3)Si $E\subseteq F$ alors : $card(E)\le card(F)$ et

$card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

Démonstration :1)Si on ajoute Card(E) et Card(F), on compte deux fois les éléments de $E\cap F$. On doit donc retrancher $card(E\cap F)$ pour obtenir le cardinal de $E\cup F$

2)puisque : $E\cap F=\varnothing$ on donc $card(E\cap F)=0$ et on utilise 1)

3)Si $E\subseteq F$ alors $F=E\cup\overline{E}$ et $E\cap\overline{E}=\varnothing$ et de 2) on aura :

$card(F)=card(E)+card(\overline{E})$

donc : $card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

Exercice1 : Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer $card(A-B)$et $card(A\Delta B)$en fonction de $card(A)$ et $card(B)$ et $card(A\cap B)$

2)Montrer que

$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$
$-card(A\cap B)-card(A\cap C)+card(A\cap B\cap C)$

(Formule de Poincaré (cas particuliers) :n=3)

Solutions :1)a) Calcul de : $card(A-B)$

$(A-B)\cup(A\cap B)=A$ et $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

Donc : $card(A-B)=cardA-card(A\cap B)$

1)b) Calcul de : $card(A\Delta B)$

On a : $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

On sait que : Si $B\subseteq A$ alors :

$card(A-B)=card(B)-card(A)$

Donc $card(A\Delta B)=card(A\cup B)-card(A\cap B)$

Donc : $card(A\Delta B)=card(A)+card(B)-2card(A\cap B)$

2)Montrer que $card(A\cup B\cup C)=card((A\cup B)\cup C)$

$card(A\cup B\cup C)=card(A\cup B)+card(C)-card((A\cup B)\cap C)$

Après les calculs on trouve :

$card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$
$-card(A\cap B)-card(A\cap C)+card(A\cap B\cap C)$

Exercice2 : Dans un lycée de 100 élèves, 53 pratiquent le football et 15 le football et basket-ball et 20 pratiquent seulement basket-ball sans football

1)Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent le basket-ball ?

2)Quelle est Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins un sport ?
3)Quelle est Le nombre d'élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports ?

Solution : soit E l'ensemble de tous les élèves
soit F l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket-ball

D'après les hypothèses on a : $cardE = 100$

$cardF = 53$ et $card\left(F \cap B\right) = 13$ et

$card\left(B \cap \overline{F}\right) = 20$

1) $card\left(B\right) = card\left(B \cap F\right) + card\left(B \cap \overline{F}\right)$

Donc : $card\left(B\right) = 13 + 20 = 33$

2) l'ensemble des élèves qui pratiquent au moins un sport est $F \cup B$

$card\left(F \cup B\right) = cardF + cardB - card\left(F \cap B\right)$

$card\left(F \cup B\right) = 53 + 33 - 13 = 73$

3) l'ensemble des élèves qui ne pratiquent pas Les deux sports est :

$\overline{F \cup B} = \overline{F} \cap \overline{B}$

On a : $\overline{F \cup B} \cup \left(F \cup B\right) = E$

Donc : $card\left(\overline{F \cup B}\right) + card\left(F \cup B\right) = cardE$

Donc : $card\left(\overline{F \cup B}\right) = cardE - card\left(F \cup B\right)$

Donc : $card\left(\overline{F \cup B}\right) = 100 - 73 = 37$

Exercice 3: Dans une promotion de 36 étudiants, 22maîtrisent le C++, 22 le C# et 18 le Java.
De plus, 10 étudiants maîtrisent à la fois le C++ et le C#, 9 maîtrisent à la fois le C# et le Java, et 11à la fois le C++ et le Java.
Combien d'étudiants maîtrisent les trois langages de programmation ?

Solution : Soit A l'ensemble des étudiants qui maîtrisent le C++, B l'ensemble de ceux qui maîtrisent le C# et C l'ensemble de ceux qui maîtrisent le Java.
On cherche à calculer card(A∩B∩C).
Or les hypothèses signifient que card(A∪B)=36, card(A)=22 , card(B)=22 , card(C)=18, card(A∩B)=10, card(B∩C)=9, card(A∩C)=11.
On utilise alors la formule de Poincaré avec trois ensembles :
card(A∪B∪C)=card(A)+card(B)+card(C)−card(A∩B)−card(A∩C)−card(B∩C)+card(A∩B∩C)
On en déduit facilement que card(A∩B∩C)=4.

II. *Théorème fondamental du dénombrement*

Ou principe multiplicatif

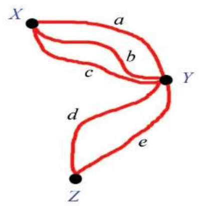
1)Activités

Activité1 : Les localités *X* et *Y* sont reliées par trois routes (*a*, *b* et *c*) et les localités *Y* et *Z* par deux routes (*d* et *e*). Combien y a-t-il de trajets de *X* à *Z* en passant par *Y* ?

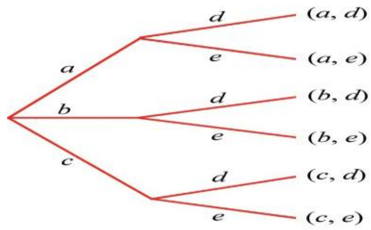
Solution :

Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (*a*, *d*), (*a*, *e*), (*b*, *d*), (*b*, *e*), (*c*, *d*), (*c*, *e*).

Activité2 : Combien de nombres de trois chiffres qu'on peut former avec les chiffres
Suivants : 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;.. ;9 ?



Solution :
Il y'a 9 possibilités pour le chiffre des unités
Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des dizaines
Il y'a 10 possibilités pour le chiffre des centaines



D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est : $n = 9 \times 10 \times 10 = 900$

Activité3: On lance une pièce de monnaie 2 fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?

Solution :

Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois
2	2

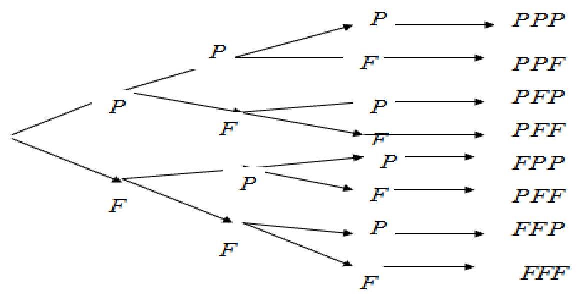
D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :
L'ensemble des possibilités est :

$\Omega = \left\{PP; FF; PF; FP\right\}$

$n = 2 \times 2 = 4$

Activité4 : On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. Quelle est le nombre de possibilités ?
Il y'a 2 possibilités pour la 1 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 2 fois : P (pile) ou F (face)
Il y'a 2 possibilités pour la 3 fois : P (pile) ou F (face)

1ere fois	2ere fois	3ere fois
2	2	2



D'après le **principe général dénombrement** le nombres de possibilités est :

L'ensemble des possibilités est :

$\Omega=\{PPP;PPF;PFP;PFF;FPP;FPF;FFP;FFF\}$

2)Si un événement C_1 peut se produire de n_1 façons différentes

et un événement C_2 peut se produire de n_1 façons différentes et …. et un événement C_p peut se produire de n_p façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

Alors :Le total n des possibilités de l'événement combiné C_1 , C_2 ; … C_p est le produit des possibilités de chaque événement.

Cad : $n_1\times n_2\times n_3\dots\times n_p$

Exemple1 : Une classe de 15 garçons et 12 filles.

Il faut un garçon et une fille pour représenter la classe.

Combien de possibilités de choix ?

Solution : 15 possibilités pour choisir un garçon, et

12 possibilités pour choisir la fille.

Il y a 15 x 12 = 180 possibilités.

Exemple2 : L'association de 20 membres souhaite élire :

- Le président,
- Le secrétaire, et
- Le trésorier.

$n=2\times2\times2=8$

Combien Ya-t-il de possibilités d'avoir ces trois responsables.

Pas de cumul de fonction.

Solution :

Pour le président : 20 possibilités (20 membres).

Pour le secrétaire : 19 possibilités (19 membres restants).

Pour le trésorier : 18 possibilités (18 membres restants).

Le total des possibilités n est le produit :

$n=20\times19\times18=36342$

Propositions : Soient A et B deux ensembles finis et non vides : $card(A\times B)=cardA\times cardB$

Preuve :soient : $cardA=p$ et $cardB=q$

On pose donc : $A=\{x_1;x_2;\dots;x_p\}$ $B=\{y_1;y_2;\dots;y_q\}$

Soit : $(x_i;y_j)$ un élément de $A\times B$ avec :

$i\in\{1;2;\dots;p\}$ et $j\in\{1;2;\dots;q\}$

Le nombre de choix possibles de x_i est p

Le nombre de choix possibles de y_j est q

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles est :

$p\times q$ donc : $card(A\times B)=cardA\times cardB=p\times q$

Exemple1 : Combien de nombres de deux chiffres tels que :Le chiffre des unités est 0 ou1ou 2 et le Le chiffre des dizaines est 5 ou 6 ou 7 ou 8 ?

<u>Solution :</u> Le nombre de chiffres c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble $A\times B$ avec :

$A=\{0;1;2\}$ et $B=\{5;6;7;8\}$

Donc : $card(A\times B)=cardA\times cardB=3\times4=12$

Exemple2 :si On lance un dé deux fois de suite.

Quelle est le nombre de possibilités ?

<u>Solution :</u> Le nombre de possibilités c'est le nombre

Des éléments de l'ensemble $A\times A$ avec :

$A=\{1;2;3;4;5;6\}$

Donc : $card(A\times A)=cardA\times cardA=6\times6=36$

Exemple3 : Combien de menus peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 5 plats et 4desserts ?

<u>Solution :</u> On a ici 3 sous-expériences : le choix de l'entrée, puis le choix du plat et enfin le choix du dessert. D'après le principe multiplicatif on aura donc 3×5×4menus possibles, c'est-à-dire 60.

III.le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soientt M et N deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de N dans M est :

$(cardM)^{cardN}=m^n$ avec : $cardM=m$ et $cardN=n$

Preuve :on a : $cardM=m$ et $cardN=n$

On pose donc : $N=\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$ et

$M=\{y_1;y_2;\dots;y_n\}$

Soit : $(x_i;y_j)$ un élément de $A\times B$ avec :

$i\in\{1;2;\dots;p\}$ et $j\in\{1;2;\dots;q\}$

Le nombre des applications de N dans M est Le nombre de choix possibles des images de chaque éléments x_i de N avec : $i \in \{1;2;...;n\}$

Puisque on a : m choix possibles pour chaque x_i

D'après le **principe général dénombrement** le nombres de choix possibles des images est :

$\underbrace{m \times m \times m \times ... m}_{nfois} = m^n$

Exemple1 : Soit l'ensemble $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

1)Combien de nombres de 3 chiffres on peut former avec les éléments de E ?

2)Combien de nombres de 3 chiffres différents deux a deux on peut former avec les éléments de E ?

Solutions :

2) le nombre cherché est Le nombre des applications de $N = \{U;D;C\}$ dans $M = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ avec U le chiffre des unités et D le chiffre des dizaines et C le chiffre des centaines

Donc le nombre est : $\underbrace{9 \times 9 \times 9}_{3\ fois} = 9^3 = 729$

1) le nombre des nombres CDU est $9 \times 8 \times 7 = 504$

Exemple2 :

1) de Combien de façons différentes peut - on ranger 5 boules de couleurs différentes dans 4 cases sachant que chaque case peut contenir tous les boules

Solutions :

le nombre de façons : est Le nombre des applications de $N = \{C_1;C_2;C_3;C_4\}$ dans $M = \{1;2;3;4;5\}$ avec C_i la case i

Donc le nombre est : $\underbrace{5 \times 5 \times 5}_{4\ fois} \times 5 = 5^4 = 625$

IV.L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

Activité :E={A,B,C} soit $P(E)$ l'ensembles de tous les parties de E

Déterminer en extension $P(E)$ et calculer : $cardP(E)$

Solution : Les sous-ensembles de E = {a, b, c} sont l'ensemble vide Ø, les trois singletons {a}, {b}, {c}, les trois paires {a, b}, {a, c}, {b, c}, et l'ensemble E = {a, b, c} lui-même donc :

$P(E)$ ={ Ø ,{a}, {b}, {c},{a, b}, {a, c}, {b, c}, E}

$cardP(E) = 8 = 2^3$

Proposition : Soit E un ensemble fini et non vide et $cardE) = n \quad n \in \mathbb{N}$ et soit $P(E)$ l'ensembles des parties de E on a : $cardP(E) = 2^n$

Preuve : En effet : pour constituer une partie A de E, il y a un choix à

Faire pour chaque élément de E : soit on le met dans B,

Soit on ne l'y met pas (2 possibilités).

S'il y a n éléments dans E, cela donne 2^n possibilités pour A, soit 2^n parties différentes.

V.Arrangements

1)Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E

C'est-à-dire : un élément de la forme :

$(x_1;x_2;...;x_p) \in E \times E \times ... \times E = E^p$

Il est fondamental de bien comprendre que dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

2)Arrangements avec répétitions

2-1 Définition : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts.On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E .

2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p .

Démonstration :

Il faut donc constituer une suite ordonnée de p éléments de E .

Pour le premier élément on a n choix possibles.

Pour le second on a aussi n choix possibles car les répétitions sont autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à $\underbrace{n \times n \times ... \times n}_{pfois} = n^p$

Nous pouvons maintenant répondre à la première des cinq questions énoncées dans la sous partie 2.1.

Exemple 1 : Arrangements avec répétitions

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ? **Solution :**

Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des chiffres utilisables pour composer un numéro de téléphone, *i.e.* E={0,1,...,9}, et on a alors n=card(E)=10

On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de p=8 éléments de E .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a 10^8

3)Arrangements sans répétitions

3-1 Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

Dans ce cas a nécessairement $p \leq n$ puisque les répétitions sont interdites.

3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note :

A_n^p et est égal à :

$$A_n^p = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)$$

Démonstration : Il faut donc constituer une suite ordonnée de p éléments de E .

Pour le premier élément on a n choix possibles.

Pour le second on a cette fois n−1choix possibles car les répétitions ne sont pas autorisées.

Et ainsi de suite.

D'après le principe multiplicatif, on a donc un nombre de possibilités égal à

$n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-p+1)$.

Exemple 1 : Arrangements sans répétitions

Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

Solution : Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des lettres de l'alphabet, *i.e.* E= {a, b,...,z} } , et on a alors n=card(E)=26

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de p=5 éléments de E .

D'après le résultat ci-dessus, il y en a :

$$A_{26}^5 = 26\times25\times24\times23\times22 = 7893600$$

Remarque : Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est A_n^p

Exemple 2 : dans un tournoi il Ya 10 participants

Déterminer le nombre de classements des 3 premiers places (on suppose que 2 coureurs ne peuvent pas prendre le même classement

Solution : Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions donc : $A_{10}^3 = 10\times9\times8 = 720$

Exemple 3 : Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

1)On tire 3 boules de l'urne Successivement avec remise

Et on construit un nombre de trois chiffres

Quel est le nombre de nombres possibles ?

2)On tire 3 boules de l'urne Successivement sans remise

Quel est le nombre de nombres possibles ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation d'arrangements avec répétitions (Successivement avec remise)

il y en a donc : $9^3 = 9\times9\times9 = 729$

2) Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions (Successivement sans remise)

il y en a donc : $A_9^3 = 9\times8\times7 = 504$

VI.Permutations

1)permutations sans répétitions

Activité : Quelle est le nombre de mots de 4 lettres (avec un sens ou non) du mot « AID » qu'on peut former ?

Solution : « ADI » s'appelle une permutation

Les mots sont : « AID » et « ADI » « IAD » « IDA » « DAI » « DIA »

il y en a donc : $6 = 3\times2\times1$ permutations

$3\times2\times1$ se note $3!$

5-1 Définition et Théorème : Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n! (** ***factorielle n*** **)** défini par

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times2\times1$$

preuve : puisque le nombre de permutations d'un ensemble fini E c'est le nombre d'arrangements sans répétitions de n élément de E $(n = p)$ donc :

$$A_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-n+1) = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times1$$

Remarque :

- Dans les notations avec parenthèses du type (a ; b ; c) l'ordre est pris en compte. (il s'agit d'une liste ordonnée)
- Dans les notations avec accolades du type {a ; b ; c} l'ordre n'est pas pris en compte. (il s'agit d'un ensemble)
- Par convention on pose 0! = 1

Exemple 1: De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Réponse : 10! = 3628800

Exemple 2: De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Réponse : $36! = 3.72 \times 10^{41}$

2)permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont Identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls *k* éléments sont distincts ($k \le n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \ge 1$, on a :

$P_n = \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$ (P_n permutations avec répétitions**)**

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, ..., k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par $n_i!$, d'où :

$P_n \times n_1! \times n_2! \times ... \times n_k! = n!$

Exemple 1: Les $\dfrac{5!}{2! \times 1! \times 2!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

aabcc aacbc aaccb abacc abcac abcca acabc acacb acbac acbca

accab accba baacc bacac bacca bcaac bcaca bccaa caabc caacb

cabac cabca cacab cacba cbaac cbaca cbcaa ccaab ccaba ccbaa

Exemple 2: Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot : « excellence » ?

Réponse : $\dfrac{10!}{4! \times 1! \times 2! \times 2! \times 1!}$ = 37800

Car **e** se répète 4 fois et **x** une fois et **c** deux fois **L** deux fois et **n** une fois

VII.Combinaisons

Activité : soit Ω = {a , b , c , d , e} un ensemble

Quelle est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments ?

Les sous-ensembles de Ω à 2 éléments sont :

{ {a , b} , { a , c } , { a , d } , {a , e },

{b , c}, {b , d }, {b , e }, {c , d}, {c , e }, {d, e}}

Il y a : 10 sous-ensembles

Sous-ensembles à 2 éléments s'appelle une 2-COMBINAISON

1 Définition : Soit E un ensemble non vide de n éléments (n ≠ 0) :

Et un entier p : 0 ≤ p ≤ n

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E.

Remarque :« combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.

(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments

2 Propriété : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que 0 ≤ p ≤ n on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p et on a : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$ et on a aussi : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$

Démonstration : Pour chaque sous-ensemble de p éléments de E, il y a $p!$ façons d'ordonner ses p éléments. Il s'agit en effet du nombre de permutations sans répétitions d'un ensemble de p éléments.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E est donc égal au nombre de sous-ensemble de p éléments de E multiplié par $p!$

Ainsi : $A_n^p = C_n^p p!$

Donc : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$ donc : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

• Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :

$C_n^0 = 1$ (L'ensemble vide)

• Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est :

$C_n^1 = n$ (les singletons)

• Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est :

$C_n^n = 1$ (L'ensemble E)

Exemple1 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7.

On tire 2 boules de l'urne simultanément

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair ?
3. Quel est le nombre de tirages pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair ?

Solution :1) Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque chaque tirage est une permutation de 2 éléments dans un ensemble de 7 éléments (simultanément) donc le nombre de tirages possibles est : $C_7^2 = \frac{A_7^2}{2!} = \frac{7\times6}{2\times1} = 21$

2)pour que la somme des numéros des boules tirées soit pair il suffit de tirer 2 boules pairs **ou** tirer 2 boules impairs

Donc : le nombre est :

$$C_4^2 + C_3^2 = \frac{A_4^2}{2!} + \frac{A_3^2}{2!} = \frac{4\times3}{2\times1} + \frac{3\times2}{2\times1} = 6+3=9$$

Car il ya 3boules pairs et 4boules impairs

3) pour que la somme des numéros des boules tirées soit impair il suffit de tirer une boules pairs **et** tirer une boules impairs :

Donc : le nombre est : $C_4^1 \times C_3^1 = 4\times3 = 12$

Exemple2 : UN tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois

Combien doit-on organiser de matchs ?

Solution : Une rencontre est déterminée par le choix de deux équipes parmi 8

Comme il n'y a qu'un match entre deux équipes (pas d'aller-retour), le choix (équipe A, équipe B) est identique au choix (équipe B, équipe A). Il y a donc $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ rencontres possibles

Exemple3 : Le bureau d'une association contient 4 hommes et 5 femmes et on souhaite élire un comité de 2 hommes et 3 femmes

1) Combien de comités peut-on élire ?

2) on suppose que le président H1 et Madame la secrétaire F1 doivent être présent

Combien de comités peut-on élire ?

Solution :1) Il s'agit d'une situation de combinaisons de5 éléments dans un ensemble de 9 éléments (simultanément)

donc le nombre de comités qu'on peut élire est :

$C_4^2 \times C_5^3 = 6\times10 = 60$

2) le nombre est : $C_3^2 \times C_4^3 = 3\times4 = 12$

Exercice1 : À la fin de l'année scolaire, tous les élèves se serre la main. S'il y a 30 élèves, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 2: Dans une classe de 20 élèves, on compte 12 garçons et 8 filles.

On doit élire 5 délégués

1)Quel est le nombre de choix possibles ?

2)Quel est le nombre de choix de délégués de même sexe ?

3)Quel est le nombre de choix de délégués de sexe différents ?

4)Quel est le nombre de choix de délégués qui contient 3 garçons et 2 filles ?

5)Quel est le nombre de choix qui contient au plus une fille ?

6)On suppose que dans cette classe il existe un élève x et sa sœur y

a) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui ne contiennent ni x ni y

b) Quel est le nombre de choix de délégués de 5 élèves qui contiennent x mais pas y

Exercice3 : Combien de diagonales contient un polygone convexe à *n* côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

Synthèse :Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1)L'ordre des éléments est-il important ?

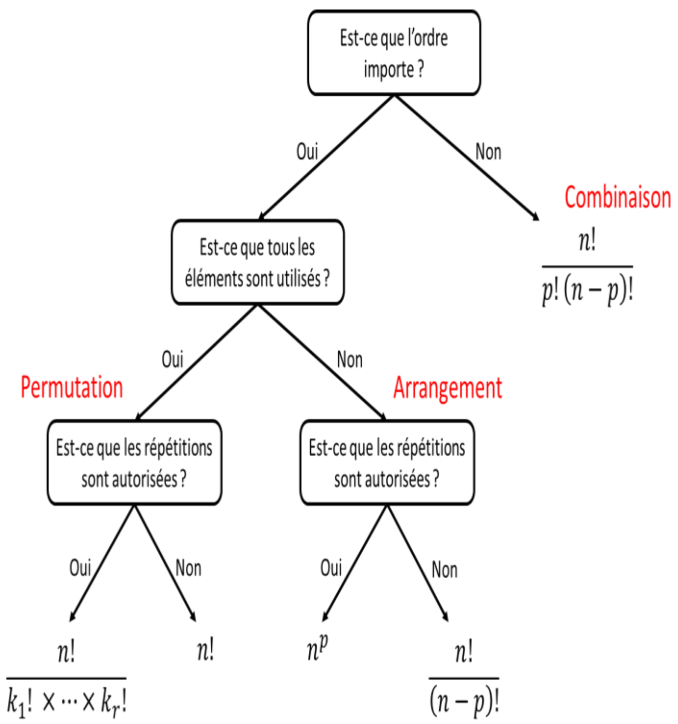
- Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.
- Si non il s'agit de combinaisons.

2)Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

- Si non il s'agit d'arrangements.
- Si oui il s'agit de permutations.

3)Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces différentes alternatives.



3) Propriétés : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que $0 \le p \le n$ on a :

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ 2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Preuve :1)on a $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^p$$

2) Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in E$

Le nombre de combinaisons de E de p éléments est la somme des combinaisons de E de p éléments qui contiennent a qui ne contiennent pas a

Donc : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

VIII.Formule du binôme de Newton

Proposition : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$$

ce qui peut également être noté :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

remarque : La somme des exposants de chaque monôme vaut toujours n.

En raison de leur rôle dans cette formule, ils sont aussi appelés coefficients binomiaux.

Démonstrations : Cette formule se démontre rigoureusement à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exemple :Développer $(1 + x)^5$ et $(1 - x)^5$ à l'aide de la formule du binôme.

Solution : $(1+x)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_n^5 1^{5-p} x^p$

$$(1+x)^5 = C_5^0 x^n + C_5^1 x^1 + C_5^2 x^2 + C_5^3 x^3 + C_5^4 x^4 + C_5^5 x^5$$

Remarque :

Les coefficients binomiaux pouvait également être trouvés en remplissant le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 5 :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Donc : $(1+x)^5 = x^n + 5x^1 + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

$$(1+x)^5 = (1+(-x))^5 = \sum_{p=0}^{5} C_n^5 1^{5-p} (-x)^p$$

Donc : $(1-x)^5 = x^n - 5x^1 + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

Exercice1 : Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien Ya-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Solution : Notons E ; H, M et S les ensembles constitués respectivement des employés, des employés hommes, des employés mariés, des employés syndiqués.

L'énoncé donne:

card(E)=800, card(H)=300, card(S)=352, card(M)=424, card(H∩S) =188, card(H∩M) =166 card(S∩M) =208, card(H∩M∩S) =144

On cherche : $card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right)$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E .

D'après les lois de Morgan

$card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right) = card\left(\overline{H \cup M \cup S}\right)$ On applique la formule du crible de Poincaré :

card(H∪M∪S)=card(H)+card(M)+card(S)−card(H∩M)−card(H∩S)−card(M∩S)+card(H∩M∩S)

On en déduit :

card(H∪M∪S)=658

$$card\left(\overline{H} \cap \overline{M} \cap \overline{S}\right) = 800 - 658 = 142$$

Il y a donc 142 femmes célibataires non syndiquées

Exercice2. Une femme a dans sa garde-robe : 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Solution :

Cette femme peut s'habiller de $4\times5\times3=60$ façons

Exercice3 : A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Solution : Un tel podium est un arrangement de 3 athlètes choisis parmi l'ensemble des 18 athlètes (l'ordre compte et il ne peut y avoir de répétition, un athlète ne pouvant remporter deux médailles simultanément). Il existe donc :

$A_{18}^{3}=\frac{18!}{(18-3)!}=\frac{18!}{15!}=18\times17\times16=4896$ Podiums différents

Exercice4 : Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Solution : Une réponse à ce QCM peut être désignée par une 15-liste de 15 chiffres choisis dans l'ensemble $\Omega=\{1;2;3;4\}$. Le nombre de ces 15-listes est donc de cardinal $(card\Omega)^{15}=4^{15}$

Exercice5 : Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2) Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Solution

1) Un tel choix est donné par un 6-uplet (sextuplé) de 6 chiffres, chacun choisi entre 1 et 6. Pour connaître le nombre de choix, on effectue le produit cartésien de l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$ ***6*** fois par lui-même. Il y donc $6^{6}=46656$ choix possibles.

2) Si les six chiffres doivent être distincts, un tel choix sera donné par un arrangement de 6 chiffres choisis parmi 6, c'est à-dire une permutation des 6 chiffres. Il aura donc 6 !=720 choix possibles

Exercice6: Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1) Calculer le nombre d'éléments de A.

2) Dénombrer les éléments de A :

a) composés de quatre chiffres distincts

b) composés d'au moins deux chiffres identiques

c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

Solution :

1) Les éléments de A sont tous les nombres de 1000 à 9999. Il y en a donc 9000. Ainsi Card A =9000

2) a) Un nombre de A est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 9 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 9 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 9 chiffres. Il y a $A_{9}^{3}=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{9!}{6!}=9\times8\times7=504$ tels arrangements.

Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts vaut donc 9 × 504 =4536

b) Le contraire de « au moins deux chiffres identiques » est « quatre chiffres distincts » Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » est égal au nombre total d'éléments de A diminué du nombre d'éléments de A possédant leurs quatre chiffres distincts, nombre qui a été calculé dans la question précédente. Le nombre d'éléments de A possédant « au moins deux chiffres identiques » vaut donc 9000-4536=4464

c) Un nombre de A composé de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 est un élément du produit cartésien :

- d'un élément de $\Omega_2=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ en guise de premier chiffre. Il y a 7 possibilités.

- Une fois cet élément choisi, il va falloir choisir les 3 chiffres restants parmi 7 seulement (aucun ne pouvant être égal au premier chiffre choisi, ni égal à 5 ou 7). On doit donc choisir un arrangement de trois éléments pris dans un ensemble de 7 chiffres. Il y a

$A_{7}^{3}=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=7\times6\times5=210$ tels arrangements. Le nombre d'éléments de A composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 vaut donc $7\times210=1470$

Exercice7: Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2) Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3) Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4) Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

Solution :

Désignons par $G=\{G_1;G_2;G_3;G_4\}$ l'ensemble des 4 garçons et $F=\{F_1;F_2\}$ l'ensemble des 2 filles.

1) L'ensemble des dispositions possibles de ces 6 personnes sur les six places d'un banc correspond à l'ensemble des permutations des six éléments de l'ensemble . Il a donc 6 !=720 dispositions différentes.

2) Si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre, il y a deux « configurations possibles » : 4 garçons 2 filles ou 2 filles 4 garçons Au sein de chaque configuration, il y a 2 !=2 manières de permuter les 2 filles, et 4 !=24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total manières de placer ainsi ces six personnes 2×4 ! ×2 ! =9 6

3) Si chaque fille est intercalée entre deux garçons, il y a trois configurations possibles : G F G F G G ou G G F G F G ou G F G G F G Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! =2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! =24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total 3×2 ! ×4 ! =144 manières de placer ainsi ces six personnes

4) Si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre, il y a cinq configurations possibles : F F G G G G ou G F F G G G ou G G F F G G ou G G G F F G ou G G G G F F Une fois la configuration « choisie », il y a 2 ! =2 manières de permuter les 2 filles, et 4 ! =24 manières de permuter les 4 garçons Il y aura au total 5× 2 ×4 ! =240 manières de placer ainsi ces six personnes

Exercice8 : On trace dans un plan n≥3 droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé?

Solution : Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi *n*, c'est-à-dire :

$$C_n^3=\frac{n!}{3!(n-3)!}=\frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}=\frac{n\times(n-1)(n-2)}{6}$$

Exercice9 : Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués 1) Quel est le nombre de choix possibles ? 2) Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et fille 3) Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons

Solution : Les délégués sont choisis sans ordre

1) Les choix simultanés de 2 délégués parmi les 32 élèves sont au nombre de $C_{32}^2=496$

2) Si on impose d'avoir un garçon et une fille, alors le choix des deux délégués est un élément du produit cartésien entre :

- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 19 garçons, soit $C_{19}^1=19$ choix
- l'ensemble des choix simultanés de 1 délégué parmi les 13 filles, soit $C_{13}^1=13$

L'ensemble des choix est donc de cardinal $C_{19}^1\times C_{13}^1=19\times13=247$

3) Si on impose d'avoir 2 garçons comme délégués, le nombre de choix des deux délégués est donc « réduit » au nombre de choix de 2 délégués parmi les 19 garçons, au nombre de $C_{19}^2=171$

Exercice10 : Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.

1) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2) Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3) Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

Solution :

1) Le nombre de d'échantillons différents est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30, soit $C_{30}^4=$ 27405

2) Le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataires est égal au nombre de choix de 4 personnes parmi les 30-12=18 non célibataires, soit $C_{18}^4=$3060

3) Le contraire de « au moins un célibataire » est « aucun célibataire ».
Le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal au nombre total d'échantillons diminué du nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire. Ces deux nombres ayant été déterminés dans les deux questions précédentes,

on conclut que le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire est égal à $C_{30}^{4}-C_{18}^{4}=27405-3060=24345$

Exercice11 : Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).
1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les possibilités :
a) De ne tirer que 3 jetons verts ;
b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
Reprendre alors les questions a), b), c) et d).
Solution :
1) Tirages successifs sans remise de 3 jetons

a) Notons A l'événement « Tirer 3 jetons verts ».

On a $card(A)=A_{5}^{3}$

b) Notons B l'événement « Ne tirer aucun jeton vert ». On a $card(B)=A_{4}^{3}$

c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts » cad :Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 verts
$card(C)=A_{9}^{3}+3A_{5}^{1}A_{4}^{2}+3A_{5}^{2}A_{4}^{1}$
2) a) Notons A l'événement «Tirer 3jetons verts ».
On a $card(A)=C_{5}^{3}$
b) Notons B l'événement
« Ne tirer aucun jeton vert ». On a $card(b)=C_{4}^{3}$
c) Notons C l'événement « Tirer au plus 2 jetons verts »
cad Ne tirer aucun vert ou Tirer exactement 1 vert ou Tirer exactement 2 vert : $C_{9}^{3}+C_{5}^{1}C_{4}^{2}+C_{5}^{2}C_{4}^{1}$
d) Soit D l'événement « Tirer exactement 1 jeton vert ». $C_{5}^{2}C_{4}^{1}$

Exercice12: Christian et Claude font partie d'un club de 18 personnes. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre elles pour représenter le club à un spectacle.
1) Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?
2) Dans combien de ces groupes peut figurer Christian ?
3) Christian et Claude ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de telle façon que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble ?
Solution :
1) Le nombre de choix de 5 personnes parmi les 18 est égal à $C_{18}^{5}=8568$
2) Le nombre de groupes dans lequel figure Christian est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 17, soit $C_{17}^{4}=2380$
3) Afin que Christian et Claude ne se retrouvent pas ensemble, il faut : - constituer un groupe de 5 personnes contenant Christian mais pas Claude. Le nombre de groupes dans lequel figure Christian mais pas Claude est égal (une fois lui choisi) au nombre de groupes de 4 personnes choisies parmi 16 (pour ne pas qu'y figure Claude), soit $C_{16}^{4}=1820$ 1 OU - constituer un groupe de 5 personnes contenant Claude mais pas Christian.De façon analogue à ce qui précède (Christian et Claude jouent des rôles similaires), il y a $C_{16}^{4}=1820$ possibilités Il y a donc $C_{16}^{4}+C_{16}^{4}=3640$répondant à cette condition

Exercice13: Une course oppose 20 concurrents, dont Ahmed.
1. Combien Ya-t-il de podiums possibles ?
2. Combien Ya-t-il de podiums possibles où Ahmed est premier ?
3. Combien Ya-t-il de podiums possibles dont Ahmed fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun.
Combien Ya-t-il de distributions de récompenses possibles ?
Solution :1)Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à 20×19×18=6840.
2)Le premier concurrent est Ahmed. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles ; Le nombre de podiums ainsi constitués est de 19×18.
3)Il y a trois choix possibles pour la place D'Ahmed. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de 3×19×18.

4)L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $C_{20}^{3}=1140$

Exercice14 : Dans une pièce, il y a deux tables. La première dispose de 3 chaises, numérotées de 1 à 3, la seconde dispose de 4 chaises, numérotées de 1 à 4. Sept personnes entrent. Combien Ya-t-il de possibilités de les distribuer autour de ces deux tables ?

Solution : On commence par choisir les personnes qui vont s'installer autour de la première table. Il y a C_{7}^{3} possibilités. Ensuite, les 3 personnes qui sont autour de la première table peuvent choisir librement leur place. Il y a 3! choix (autant que de permutations des 3 chaises). De même, il y 4! choix pour les personnes qui s'installent autour de la deuxième table. Le nombre total de possibilités est donc $C_{7}^{3}\times 3!\times 4!$

Le fait de trouver 7! montre que le dénombrement que nous avons fait, qui suit les données de l'énoncé, peut être simplifié. En effet, le fait d'imposer deux tables ne change en réalité rien au problème : on doit placer 7 personnes sur 7 chaises, et il y a 7! façons différentes de le faire.

Exercice15 : Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1)1-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

1-2) Combien Ya-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

1-3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?

1-4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2)Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

2-1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

2-2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?

2-3) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

Solution :

1)1-1) Il y a $9^3=9\times9\times9=729$ codes possibles.

1-2) Pour chacun des deux premiers chiffres, il y a 9 choix possibles. Pour le dernier, il y a 4 choix possibles (on peut choisir 2,4,6,8). Il y a donc $9\times9\times4=324$ tels codes.

1-3) On va compter par différence. Il y a $8\times8\times8$ codes ne contenant pas du tout le chiffre 4. Il y a donc $9\times9\times9-8\times8\times8=217$codes comprenant au moins une fois le chiffre 4.

1-4) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où se situe le chiffre 4. Pour chacun des deux autres chiffres, il y a 8 choix possibles. Il y a donc $3\times8\times8=192$ tels codes.

2) 2-1)On cherche cette fois un arrangement de 3 chiffres parmi 9. Il y a donc $9\times8\times7= 504$ choix possibles

2-2) Il y a cinq choix pour le dernier chiffre. Celui-ci choisi, il reste huit choix pour le premier chiffre, puis sept pour le deuxième. Il y a donc $8\times7\times5=280$ tels codes

2-3) Il y a 3 choix pour la place dans le nombre où on place le chiffre 6. Pour les autres chiffres, il y a d'abord 8 choix, puis 7 choix possibles. Le nombre de tels codes est donc de $8\times7\times3=168$.

Exercice16 : Ali et Fatima font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1)Combien y-a-t-il de comités possibles ?

2)Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 11 fille ?

3)Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ? 4)On veut que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

5)On ne veut pas que Ali et Fatima soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

Solution :1) Il s'agit de choisir trois joueurs parmi 8. Le nombre de comités possibles est donc de $C_{8}^{3}=56$

2)Il s'agit de choisir deux garçons parmi 6, puis une fille parmi 2. Le nombre de choix possibles est donc de $C_{6}^{2}\times C_{2}^{1}$

3)On compte le nombre de comités comprenant 3 garçons : il vaut C_{6}^{3} (il faut choisir trois garçons parmi 6). On a déjà compté le nombre de comités comprenant exactement deux garçons. Donc le nombre de comités comprenant au moins deux garçons vaut $C_{6}^{2}\times C_{2}^{1}+C_{6}^{3}$

4)Il ne reste qu'à choisir le dernier membre du comité : il y a 6 comités comprenant à la fois Ali et Fatima

On compte les comités comprenant Ali, mais pas Fatima, et les comités comprenant Fatima, mais pas Fred. Dans le premier cas, on trouve C_{6}^{2}) comités (il reste à choisir deux joueurs parmi 6, puisqu'on ne peut plus prendre ni Ali, ni Fatima). Dans le second cas, on a aussi C_{6}^{2} comités. On compte enfin les comités ne comprenant ni Ali, ni Fatima. Il y en a C_{6}^{3} Finalement, le nombre total de comités ne comprenant pas simultanément

Fatima et Ali est $C_6^2+C_6^2+C_6^3=50$. Plus simplement, on pouvait aussi soustraire du nombre total de comités 56, cf question 1) le nombre de comités comprenant à la fois Fred et Émile (6, cf question 4), et on retrouve bien 50 comités ne comprenant pas simultanément Ali et Fatima.

Exercice17 On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement:
si les livres doivent être groupés par matières.
si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Solution : Il y a 3! façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a 4! façons de ranger les livres de mathématiques, 6! façons de ranger les livres de physique, et 3! façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : 3!4!6!3!
Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout 10×4!9! rangements différents.

Exercice18 :Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.
Corrigé
Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot
On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc :

- MATHS : $5!$
- RIRE : $\frac{4!}{2!}$
- ANANAS : $\frac{6!}{2!3!}$

Exercice19 : Soit *p* points du plan distincts non aligner 3 par 3.
1)Combien de polygones à *n*≤*p* côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?
2)On fixe un tel polygone à *n* côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il?

Solution :
1)Il faut d'abord choisir *n* points parmi ces *p* points. Il y a C_p^n tels choix. Ces points *A*1,…,*An* étant choisis, on fixe un premier sommet comme origine. On choisit ensuite le sommet suivant pour lequel il y a *n*−1choix, puis le troisième sommet, pour lequel il y a *n*−2choix, etc... Il y a donc (*n*−1)! possibilités pour ordonner les sommets. Mais attention, procédant ainsi, on compte chaque polygone deux fois car l'ordre global des points n'importe pas (par exemple, le polygone *ABCD* est le même que le polygone *ADCB*). Finalement, on trouve qu'il y a $\frac{1}{2}(n-1)!C_p^n$ polygones possibles à *n* sommets choisis parmi *p* points du plan.
2)Une diagonale est définie par deux sommets consécutifs. On choisit donc d'abord un premier sommet *A* parmi les *n* sommets du polygone. On choisit ensuite un deuxième sommet parmi les sommets du polygone qui ne sont ni *A* ni un sommet adjacent à *A* . Il y a *n*−3choix. Mais ce faisant, on compte deux fois chaque diagonale (la diagonale (*AB*) est comptée en choisissant *A* , puis *B* , et en choisissant *B* , puis *A*). Le nombre de diagonales est donc $\frac{n}{2}(n-3)$.

Exercice20: Dans une urne se trouvent 9 boules :
4 rouges numérotées 0 ;1 ;1 ;2 et 3 vertes numérotées 1 ;2 ;2 et deux noires numérotées 1 ; 3
On en tire 3 boules
Et on considéré les évènements suivants :
A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes. Deux à deux »
B « obtenir trois boules qui portent le même numéro
C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 »
D « obtenir au moins une boule rouge »
Trouver le nombre de possibilités des évènements A ; B ; C ; D dans les cas suivants :
1)Tirage de 3 boules simultanément
2)Tirage de 3 boules Successivement Avec remise
3)Tirage de 3 boules Successivement sans remise

Solutions : on note les couleurs par : R ; V ; N

1)Tirage de 3 boules simultanément

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.
Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient la combinaison : $\{R;V;N\}$ et le nombre de possibilités
Est $C_4^1\times C_3^1\times C_2^1=4\times3\times2=24$ donc **:** $cardA=24$
b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »
Tous les numéros : 0 ;1 ;1 ;1 ;1 ;2 ;2 ;2 ;3
Donc : 3 boules qui portent 1 ou
3 boules qui portent 2 donc le nombre de possibilités est $C_4^3+C_3^3=4+1=5$ donc **:** $cardB=5$
c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :
3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad les combinaisons : $\{0;1;3\}$ ***ou*** $\{0;2;2\}$ ***ou*** $\{1;1;2\}$
donc le nombre de possibilités

est $cardC = C_1^1 C_4^1 C_1^1 + C_1^1 C_3^2 + C_4^2 C_3^1 = 4+3+6\times 3 = 25$

d) methode1 :

D « obtenir au moins une boule rouge »

Obtenir au moins une boule rouge si :

On tire 1 rouge et 2 non rouges **ou** 2 rouges et 1 non rouges **ou** 3 rouges

cad les combinaisons : $\{R;\overline{R};\overline{R}\}$ ***ou*** $\{R;R;\overline{R}\}$ ***ou*** $\{R;R;R\}$ avec **:** $\overline{R}$ « ne pas tirer une boule rouge »

$cardD = C_4^1 C_5^2 + C_4^2 C_5^1 + C_4^3 = 4\times 10 + 6\times 5 + 4 = 74$

Methode2 :

$\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

$card\overline{D} = C_5^3 = 10$

Donc $cardD = C_9^3 - card\overline{D} = 84 - 10 = 74$

2)Tirage de 3 boules successivement Avec remise

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

Deux à deux » si on tire une boule rouge et une boule verte et une noire et on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(R;V;N)$ (avec l'ordre)

et le nombre de possibilités est :

$cardA = 6\times(4\times 3\times 2) = 144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(0;0;0)$ ***ou*** $(1;1;1)$ ***ou*** $(2;2;2)$ ***ou*** $(3;3;3)$ donc le nombre de possibilités est $cardB = 1^3 + 4^3 + 3^3 + 1^3 = 93$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :

3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad on obtient une l'arrangement avec répétition de type: $(1;1;2)$ ***ou*** $(0;2;2)$ ***ou*** $(0;1;3)$ (avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités

est $cardC = 3!1\times 4\times 1 + C_3^2 \times 1\times 3^2 + C_3^2 \times 4^2 \times 3 = 195$

d) $\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est : $cardE = 9^3$

Donc $cardD = 9^3 - 5^3 = 604$

3)Tirage de 3 boules successivement sans remise

a) A « obtenir trois boules de trois couleurs différentes.

on obtient une l'arrangement de type: $(R;V;N)$ (avec l'ordre)et le nombre de possibilités est :

$cardA = 3!A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 = 6\times(4\times 3\times 2) = 144$

b) B « obtenir trois boules qui portent le même numéro »

Donc : 3 boules qui portent 1 ou

3 boules qui portent 2

on obtient une l'arrangement de type: $(0;0;0)$ ***ou*** $(1;1;1)$ ***ou*** $(2;2;2)$ donc le nombre de possibilités est

$cardB = A_4^3 + A_3^3 = 24 + 6 = 30$

c) C « la somme des numéros des boules tirées est égale a 4 » les possibilités sont :

3+1+0=4 ou 0+2+2=4 ou 2+1+1=4 cad on obtient une l'arrangement de type: $(1;1;2)$ ***ou*** $(0;2;2)$ ***ou*** $(0;1;3)$ (avec l'ordre)

Donc le nombre de possibilités est

$cardC = 3!A_1^1 \times A_4^1 \times A_1^1 + C_3^2 \times 1\times A_3^2 + C_3^2 \times A_4^2 \times A_3^1 = 150$

d) $\overline{D}$ «ne pas obtenir de boules rouges »

Donc les 3 tirés sont non rouges

le nombre de tous possibilités est : $cardE = A_9^3$

Donc $cardD = A_9^3 - card\overline{D} = A_9^3 - A_5^3 = 564$

Exercice 21: $k\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $0\le k\le n$

1)Montrer que : $A_{n+1}^k = A_n^k + kA_n^{k-1}$

2) $k\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $0\le k\le p\le n$

Montrer que : $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$ et déterminer la valeur de la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k}$

3)Déterminer le nombre entier $3\le n$ tel que : $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n$

4) Montrer que : $2^n \ge 1+n$ et $3^n \ge 1+2n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

5) a)Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

5) b) calculer : $S_n = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$ en fonction de n

6) quelle est le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans l'identité remarquable $(x+2y+3z)^{12}$

solution :

1)on a La relation de Pascal : $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

Donc : $k!C_{n+1}^k = k!\left(C_n^k + C_n^{k-1}\right)$ donc

$k!C_{n+1}^k = k!C_n^k k! + k!C_n^{k-1}$

donc $k!C_{n+1}^k = k!C_n^k k! + k\times(k-1)!C_n^{k-1}$

or on a : $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} \Leftrightarrow A_n^k = k!C_n^k$

donc $A_{n+1}^k = A_n^k + kA_n^{k-1}$

2)Montrons que : $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$

On a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Et on a :

$$C_p^k C_n^p = \frac{p!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!}$$

Donc $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$

$$S = \sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^p \text{ car } C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p$$

Donc : $S = C_n^p \sum_{k=0}^{p} C_p^k$ et on d'après le binôme de newton on a : $(a+b)^p = \sum_{p=0}^{p} C_p^k a^k b^{p-k}$

Pour : a=1 et b=1 on a :

$$(1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k 1^k \times 1^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k = 2^p$$

Donc : $S = 2^p C_n^p$

3) on a :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)}{2}$$

$$C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)}{6}$$

$C_n^1 = n$

Donc $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 5n \Leftrightarrow$

$$n + \frac{n\times(n-1)}{2} + \frac{n\times(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} n^2 - 25 = 0 \\ n \geq 3 \end{cases}$ donc $S = \{5\}$

4) D'après le binôme de newton on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Pour : a=1 et b=1 on a : $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

Donc : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$

Donc : $2^n = 1 + n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k$ donc $2^n \geq 1 + n$

Pour : a=2 et b=1 on a : $(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$

Donc : $3^n = C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k 2^k$

Donc : $3^n = 1 + 2n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k 2^k$ donc $3^n \geq 1 + 2n$

5) a)Montrons que : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'après le binôme de newton on a : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Pour : x=-1 on a : $(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$

Donc $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) b) calculons: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k$ en fonction de n

on a : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

du calcul de la dérivée on trouve :

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)' = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k x^{k-1}$$

Pour : x=1 on a : $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

6) d'après le binôme de newton on a :

$$(x+2y+3z)^{12} = (x+(2y+3z))^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{12-k} (2y+3z)^k$$

Et de cette identité en déduit que :

Pour : k=5 $C_{12}^5 x^7 (2y+3z)^5$

Or : $(2y+3z)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_5^p (2y)^{5-p} (3z)^p$

Pour : p=2 $C_5^2 (2y)^3 (3z)^2 = C_5^2 2^3 3^2 y^3 z^2$

le coefficient de $x^7 y^3 z^2$ dans l'identité remarquable $(x+2y+3z)^{12}$ est : $C_{12}^5 C_5^2 2^3 3^2 = 570240$

Exercice 22: Soit E l'ensemble à 12 éléments {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l}.

1)Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent

a. A et b ;
b. a mais pas b
c. b mais pas a
d. ni a , ni b

2)En déduire la relation : $C_{12}^5 = C_{10}^3 + 2C_{10}^4 + C_{10}^5$

3)Généraliser le résultat obtenu en prouvant, par un dénombrement, que pour 2≤p≤n, on a

$$C_n^p = C_{n-2}^{p-1} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$$

4)Retrouver le résultat précédent en appliquant la formule du triangle de Pascal.

Solution :

1)a)Puisque deux éléments sont fixés, il reste à choisir 3 éléments parmi 10. Le nombre recherché est C_{10}^{3}

b)Un élément est déjà choisi, il reste à en choisir 4 parmi 10 (puisque *b* est exclu et qu'on ne peut bien sûr par reprendre *a*). Il y a donc C_{10}^{4} telles parties.

c)Idem.

d)On doit cette fois choisir 5 éléments parmi 10 : il y a C_{10}^{5} parties ne comprenant ni *a* ni *b* .

2)Il y a C_{12}^{5} parties à 5 éléments de *E* . Mais on a réalisé une partition de ces parties : celles qui contiennent *a* et *b* , celles qui contiennent seulement un des deux éléments, celles qui ne contiennent aucun des deux. D'où la formule demandée.

3)On part cette fois d'un ensemble à *n* éléments dont on fixe deux éléments *a* et *b* . Le nombre de parties à *p* éléments de cet ensemble est C_n^p . On réalise une partition de ces parties en les parties :

- contenant *a* et *b* : il y a en a C_{n-2}^{p-2} (il reste *p*−2 éléments à choisir parmi *n*−2);
- contenant *a* mais pas *b* : il y en a C_{n-2}^{p-1}
- contenant *b* mais pas *a* : il y en a C_{n-2}^{p-1}
- ne contenant ni *a* , ni *b*: il y en a. C_{n-2}^{p}

Faisant la somme, on trouve bien la formule voulue.

4)On applique trois fois la relation du triangle de Pascal : une fois dans la première ligne, deux fois dans la deuxième :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_{n-2}^{p-2} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p}$$

ce qui après regroupement donne la formule voulue.

Exercice23 : Soit 1≤p≤n . On considère n boules et deux boîtes Aet B . Un échantillon est constitué d'une boule dans la boîte A et de p−1 boules dans la boîte B . En dénombrant de deux façons différentes ces échantillons, établir la formule

$$nC_{n-1}^{p-1} = pC_n^p$$

Retrouver cette formule par le calcul.

Solution :

Voici deux façons de compter le nombre d'échantillons.

- On choisit d'abord une boule à mettre dans la boîte A : il y a n choix possibles. Puis on choisit p−1 boules parmi les n−1 boules restantes pour mettre dans la boîte B . Il y a donc nC_{n-1}^{p-1} échantillons.
- On choisit d'abord les p boules parmi n qui seront dans les deux boîtes : il y a C_n^p choix possibles. Puis on choisit parmi ces p boules celle à mettre dans la boîte A: il y a p choix possibles, et donc le nombre d'échantillons recherché est pC_n^p

Puisqu'on compte de deux façons différentes le même nombre d'échantillons, on obtient bien le résultat escompté.

Par le calcul, on a :

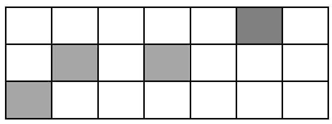
$$nC_{n-1}^{p-1} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = pC_n^p$$

Soit E un ensemble à n éléments ; Combien y-a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que X⊂Y?

Pour p parcourant 0,…,n il y a C_n^p choix possibles pour Y une partie de E à p éléments. Y étant fixé, X est une partie quelconque de Y , qui compte p éléments, il y a donc 2^p choix pour X . Le nombre recherché est donc égal à

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p 2^p = (1+2)^n = 3^n$$

Exercice24 : On a une grille de : $7\times 3 = 21$ (voire le schéma)



1)On colore par le noire 4 carreaux de la grille

a. Quel est le nombre de cas possibles ?

b. Quel est le nombre de cas possibles tel que tous les carreaux noirs soient sur la même horizontal ?

c. Quel est le nombre de cas possibles tel que 3 carreaux noirs soient sur la même vertical ?

2)maintenant on colore 4 carreaux de la grille par les couleurs : noire, rouge et vert et jaune

a. Quel est le nombre de façons possibles ?

b. Quel est le nombre de façons possibles pour que les carreaux colorés soient sur la même horizontal

Solution :1)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation de combinaisons puisque on colore par le noire seulement (pas d'ordre) donc : Les choix simultanés de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de $C_{21}^{4} = 5985$

1)b)on choisit entre 3 horizontaux on a $C_3^1=3$ possibilités et choisi entre **7** carreaux et colore 4 donc C_7^4 possibilités donc au total il Ya :

$C_3^1\times C_7^4=105$

1)c) 3 carreaux noirs soient sur la même vertical on choisit entre 7verticaux on a $C_7^1=7$ possibilités et choisi entre **1** carreaux parmi 18 qui restent et on colore donc C_{18}^1 possibilités donc au total il Ya : $C_7^1\times C_{18}^1=7\times18=126$

2)a) dans ce cas Il s'agit clairement d'une situation d'arrangement puisque on colore par des couleurs différentes (l'ordre) donc : Les choix de 4 carreaux parmi les 21 carreaux sont au nombre de $A_{21}^4=143640$

1)b)on choisit entre 3 horizontaux on a $C_3^1=3$ possibilités et choisi entre **7** carreaux et colore 4 donc A_7^4 possibilités donc au total il Ya :

$C_3^1\times A_7^4=3\times840=2520$

Exercice25 : $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ tq $0\le p\le n$

1)Montrer que : $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$x^2-C_n^px+C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=0$

Solution :1° $C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}=\dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}+\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$=\dfrac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)\,p!(n-1-p)!}+\dfrac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!}$

$=\dfrac{(n-p)(n-1)!}{(n-p)!\,p!}+\dfrac{p(n-1)!}{(n-p)!\,p!}=\dfrac{(n-p)(n-1)!+p(n-1)!}{(n-p)!\,p!}$

$=\dfrac{(n-1)!(n-p+p)}{(n-p)!\,p!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-p)!\,p!}=\dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}=C_n^p$

2) $x^2-C_n^px+C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=0$

$\Delta=\left(C_n^p\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p=\left(C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p$

$\Delta=\left(C_{n-1}^p\right)^2+2C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p+\left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2-4C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p$

$\Delta=\left(C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}\right)^2$

$x_1=\dfrac{-C_n^p+C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}}{2}=\dfrac{-C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}}{2}=-C_{n-1}^{p-1}$

$x_2=\dfrac{-C_n^p-C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}}{2}=\dfrac{-C_{n-1}^p-C_{n-1}^{p-1}-C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}}{2}=-C_{n-1}^p$

$S=\left\{-C_{n-1}^{p-1};-C_{n-1}^p\right\}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien