EXERCICE 1

On pose $A = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{18}}{\cos\dfrac{\pi}{18}\ \sin\dfrac{\pi}{18}}$

1. Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{18} - \sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{18} = 2\cos\dfrac{7\pi}{18}$
2. Montrer que $\cos\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{\pi}{18} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{9}$
3. En déduire que $A = 4$

EXERCICE 2

On pose $\alpha = \dfrac{\pi}{10}$

1) vérifier que $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

2) Montrer que $\cos 3\alpha = \cos\alpha\left(1 - 4\sin^2\alpha\right)$

3) En déduire $\sin\dfrac{\pi}{10}$ et $\cos\dfrac{\pi}{10}$

4) Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{10}$ puis montrer que

$$\sin\frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5}\right)$$

EXERCICE 3

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$(E)\quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$

1. montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
2. résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation

$$\cos 3x = \frac{1}{2}$$

3. en déduire les solutions de (E)
4. déterminer les valeurs de

$$a = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$

et $b = \cos\dfrac{\pi}{9}\ \cos\dfrac{7\pi}{9}\ \cos\dfrac{13\pi}{9}$

EXERCICE 4

Soit α de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1. montrer que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
2. a) vérifier que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

   b) en déduire que $\cos 3\alpha = \sin\alpha$
3. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

   $\cos 3x = \sin x$ en déduire que $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$
4. résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\cos x - \left(\sqrt{2}-1\right)\sin x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

EXERCICE 5

1- montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left|\sin x + \cos x\right| \le \sqrt{2}$

2- on considère l'équation

$(E):\quad 1 + \cos^3 x + \sin^3 x = \dfrac{3}{2}\sin 2x$

a) on pose $y = \sin x + \cos x$ calculer $\sin x\cos x$ et $\sin^3 x + \cos^3 x$ en fonction de y

b) montrer que $(E) \Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 + 2y - 5\right) = 0$

3- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

EXERCICE 6

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\right]$$

b) montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times S_n = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$$

c) déduire $S_n = 2\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)\pi}{6}\right)\quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

EXERCICE 7

On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \ge 2$

1) calculer T_2 et T_3

2) a) montrer que $T_n\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = T_n - \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

b) en déduire que $T_n = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}\quad (\forall n \ge 2)$

EXERCICE 8

On pose $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

1) calculer $F\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

2) vérifier que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3) en déduire que

$$F(x) = (1+\cos x)\left(4\cos^2 x - 2\cos x - 1\right)$$

4) déterminer la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{5}$