

**Exercice 6**

1) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) | \sin x + \cos x | \leq \sqrt{2}$

2) on considère l'équation

$$(E): 1 + \cos^3 x + \sin^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$$

a) on pose  $y = \sin x + \cos x$  calculer  $\sin x \cos x$  et  $\sin^3 x + \cos^3 x$  en fonction de  $y$

b) montrer que  $(E) \Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 2y - 5) = 0$

3) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation (E)

**Exercice 7**

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) :$

$$\sin \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{k\pi}{3} = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{(2k-1)\pi}{6} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{6} \right]$$

2) montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S_n = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right) \right]$$

3) en déduire que

$$S_n = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

**Exercice 8**

On pose  $T_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  pour tout  $n \geq 2$

1) calculer  $T_2$  et  $T_3$

2) a) prouver que  $T_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = T_n - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

b) en déduire que  $T_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$   $(\forall n \geq 2)$

**Exercice 9**

On pose  $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

1) résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $F(x) = 0$

2) prouver que  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

3) en déduire que

$$F(x) = (1 + \cos x)(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1)$$

5) déterminer la valeur de  $\cos \frac{\pi}{5}$

ذ: المانتى

**Exercice 1**

$$\text{On pose } A = \frac{\cos \frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18}}$$

1. montrer que  $\cos \frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{18} = 2 \cos \frac{7\pi}{18}$

2. prouver que  $\cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{9}$

3. déduire la valeur de  $A$

**Exercice 2**

On pose  $\alpha = \frac{\pi}{10}$  1) vérifier que  $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

2) montrer que  $\cos 3\alpha = \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha)$

3) Déduire la valeur de  $\sin \frac{\pi}{10}$  et  $\cos \frac{\pi}{10}$

4) Calculer  $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$

$$\text{Montrer que } \sin \frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8} (\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5})$$

**Exercice 3**

On considère dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$(E) \quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

1) a) montrer que  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

b) résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $\cos 3x = \frac{1}{2}$

2) a) déduire les solutions de (E)

b) déterminer la valeur de

$$a = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9}$$

mathémanti

$$\text{Et } b = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9}$$

**Exercice 4**

Soit  $\alpha$  de  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tel que  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1) montrer que  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) a) montrer que  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

b) en déduire que  $\cos 3\alpha = \sin \alpha$

3) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos 3x = \sin x \text{ puis déduire que } \alpha = \frac{\pi}{8}$$

4) résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$\cos x - (\sqrt{2}-1) \sin x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**Exercice 5**

Montrer que  $\prod_{k=0}^{k=n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}$