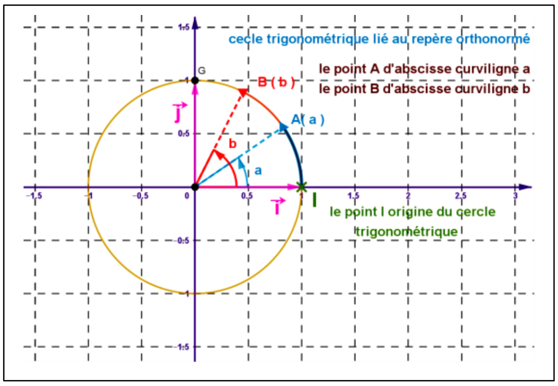
الأستاذ: بنموسى محمد

I. Formules de transformations $\sin(a\pm b)$; $\cos(a\pm b)$; $\tan(a\pm b)$:

01. Transformation de $\cos(a+b)$ puis $\sin(a+b)$:

- Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- $\mathcal{C}(O,1)$ est le cercle trigonométrique lié au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- A et B et I trois points de $(\mathcal{P})$ tel que : $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et a et b abscisses curvilignes de A et B respectivement .
- On rappel : mesure de l'angle orienté $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}$ est a c.à.d. $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}\equiv a\ (2\pi)$ ou encore $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})}=a+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$.
- On rappel : mesure de l'angle orienté $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}$ est b c.à.d. $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}\equiv b\ (2\pi)$ ou encore $\overline{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})}=b+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$



1 Déterminer les cordonnés des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

2 Calculer : $\overline{(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})}$ en fonction de a et b .

3 Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ de deux façons différentes .

4 On déduit la formule de $\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)$.

5 On déduit la formule de $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

02. Propriété :

Pour tous a et b de $\mathbb{R}$ on a :

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

03. Conséquences :

Le cas où $a=b$ on obtient :

- $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.
- D'après $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ on obtient : $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.
- $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ et $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

04. Application :

1 Trouver la valeur de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$. On a :

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{3\pi+4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion : $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

2 Calculer : $\cos\frac{\pi}{8}$

Correction :

On a : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ on prend $a = \frac{\pi}{8}$ d'où $\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$.

Par suite $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$ mais $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{8} > 0$.

Conclusion : $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

05. Transformation de : $\tan(a+b)$

- a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

1 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\sin a$; $\cos b$; $\cos a$ et $\sin b$.

2 Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ (on peut factoriser par $\frac{1}{\cos a \times \cos b}$

3 On déduit : $\tan(a-b)$ et $\tan(2a)$

06. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. on a :

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$ et $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$ et $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$.

II. Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes :

01. Activité :

D'après les formules $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$.

1 Simplifier : $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $\cos(a+b) - \cos(a-b)$ et $\sin(a+b) + \sin(a-b)$ et $\sin(a+b) - \sin(a-b)$.

2 On déduit les formules de transformations de : $\cos a \times \cos b$ et $\sin a \times \sin b$ et $\sin a \times \cos b$.

3 On pose : $a + b = x$ et $a - b = y$ écrire a et b en fonction de x et y .

4 On déduit les formules de : $\cos x + \cos y$ et $\cos x - \cos y$ et $\sin x + \sin y$ et $\sin x - \sin y$ en fonction de $\sin\frac{x-y}{2}$; $\cos\frac{x+y}{2}$; $\cos\frac{x-y}{2}$ et $\sin\frac{x+y}{2}$.

5 On déduit les formules de transformations obtenues .

02. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}$ on a :

Transformations des sommes à des produits	Transformations des produits à des sommes
$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\cos a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$
$\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$
$\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$	$\sin a\times\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$
$\sin a-\sin b=-2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$	

03. Exemple :

1 Trouver la valeur de chaque expressions : $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$.

On a : $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}=2\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Conclusion : $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

III. D'autres formules de transformations :

A. Transformation de : $a\cos x+b\sin x$:

01. Activité :

a et b de $\mathbb{R}^*$, on considère l'expression suivante $A=a\cos x+b\sin x$.

1 Factoriser l'expression A en fonction de $\sqrt{a^2+b^2}$.

2 Trouver une écriture de A sous la forme de $\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$ ou $\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$ avec α de $\mathbb{R}$ (on remarque que $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$) .

3 Donner les deux transformations obtenues .

02. Propriété :

a et b de $\mathbb{R}^*$; on a :

- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\sin(x+\alpha)$; (avec $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) .
- $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\times\cos(x-\alpha)$; (avec $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) .

03. Exemple :

1 Trouver une transformation de $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$.

On a : $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. Transformations de : $\cos x$; $\tan x$ et $\sin x$ en fonction de $t=\tan\frac{x}{2}$.

01. Activité :

On pose : $x\neq\pi+2k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

1 On rappel que : $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ écrire ses deux formules avec $2a=x$.

2 On pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ trouver $\cos x$; $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de t (on peut diviser le numérateur et le dénominateur par $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1$)

Correction pour $\sin x$:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=2\frac{t}{1+t^2}$$

On a : (see above)

02. Propriété :

On pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ avec $x\neq\pi+2k\pi$ et $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

03. Exemple :

Calculer : $\tan\frac{\pi}{8}$.

Correction :

On a : $\sin a=\frac{2t}{1+t^2}$ avec $t=\tan\frac{a}{2}$ et on prend $a=\frac{\pi}{4}$.

D'où : $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2t}{1+t^2}\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0$

Donc $\Delta'=1$ par suite on a deux solutions : $t_1=-1+\sqrt{2}$ et $t_2=1+\sqrt{2}$

On a : $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}$ donc $\tan 0<\tan\frac{\pi}{8}<\tan\frac{\pi}{4}$ d'où : $0<\tan\frac{\pi}{8}<1$ la solution acceptée est $t_1=-1+\sqrt{2}$.

Conclusion : $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$.

IV. Rappel sur les équations trigonométriques :

A. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

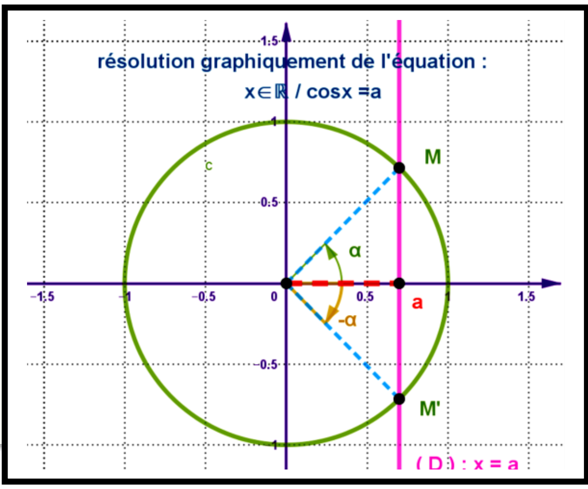
01. Propriété :

a est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$ est :

- Si $a \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ alors $S = \varnothing$ (pas de solution)
- Si $a \in [-1,1]$ on cherche α tel que $a = \cos\alpha$ d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}.$$

Par suite ensemble de solutions de l'équation est :
$S = \{\alpha + 2k\pi\ ,\ -\alpha + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.



02. Cas particuliers :

- $a = 1$ on a : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. $a = -1$ on a : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- $a = 0$ on a : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

03. Exemple :

Résoudre l'équation : $(E) : x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{1}{2}$.

On a : $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

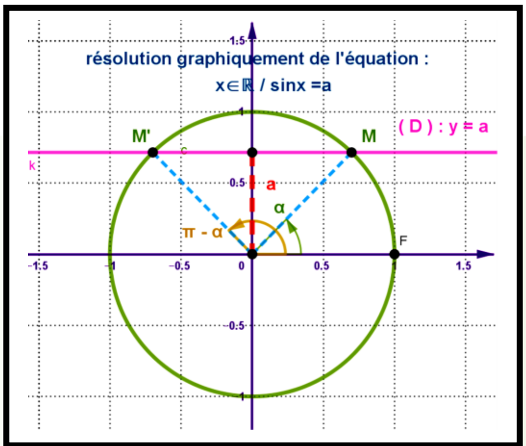
B. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

01. Propriété :

a est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$ est :

- Si $a \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ alors $S = \varnothing$ (pas de solution) .
- Si $a \in [-1,1]$ on cherche α tel que $a = \sin\alpha$ d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}.$$



Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S = \{\alpha + 2k\pi\ ,\ \pi - \alpha + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$.

02. Cas particuliers :

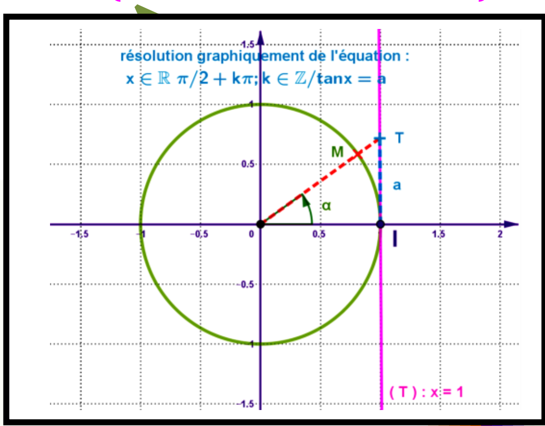
$a=1$ on a : $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. $a=-1$ on a : $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. $a=0$ on a : $S=\left\{k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

03. Exemple : Résoudre l'équation : $(E):x\in\mathbb{R}\,/\,\sin x=\frac{1}{2}$.

On a : $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S=\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

C. Equation de la forme : $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}:\tan x=a$



01. Propriété :

a est un nombre réel donné pour résoudre l'équation (E) : $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}:\tan x=a$:

- on cherche α tel que $a=\tan\alpha$ d'où :
- $\tan x=a\Leftrightarrow \tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.
- Par suite ensemble de solutions de l'équation est : $S=\left\{\alpha+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

D. Equation de la forme : $x\in\mathbb{R}$: $a\cos x+b\cos x=c$.

01. Activité :

1 Résoudre l'équation suivante de deux façons différentes : (E) : $x\in\mathbb{R}$: $\cos x+\sqrt{3}\cos x=1$.

02. Propriété :

Pour résoudre l'équation suivante (E) : $x\in\mathbb{R}$: $a\cos x+b\cos x=c$ on suit les étapes suivantes :

1ère étape :

- On écrit l'équation sous la forme suivante $(E)\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right]=c$.
- Puis on l'écrit $(E)\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right]=c\left(\text{ou }\sqrt{a^2+b^2}\left[\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x\right]=c\right)$
- Puis on l'écrit $(E)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{ou }\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

2ième étape :

- Au lieu de résoudre l'équation (E) : $x\in\mathbb{R}$: $a\cos x+b\cos x=c$ on résoudre l'équation :

$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left(\text{ou }\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$3^{\text{ième}}$ étape :

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$ l'équation n'a pas de solution ; $S=\varnothing$.
- Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$ on cherche β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$) d'où

$(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$ $\left(\text{ou } \sin(x+\alpha) = \sin\beta\right)$.

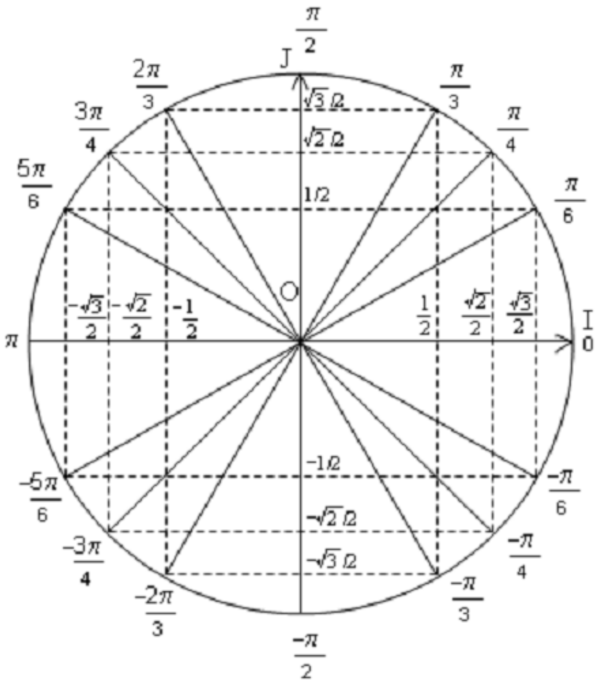
03. **Exemple :**

Résoudre l'équation : $(E): x\in\mathbb{R} : \cos 3x + \cos 3x = 1$. on a :

$$\begin{aligned}
\cos 3x + \cos 3x = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 3x\right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos\frac{\pi}{4} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ;\ k\in\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} \ ,\ -\frac{2k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$[-\pi;\ \pi]$



$[0;2\pi]$