**Exercices avec solutions**

**Exercice01 :** 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

**Solution01 :**1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1,2,4,8\}$

**Exercice02 :**

1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors $a/c$

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors $a/c$

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et $d/n^2+3$ et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

**Solution02 :** 1) a)

$$\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$$

1) b) $$\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$$

1) c) $$\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by \text{ et } a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1 \text{ et } a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a\in\{\pm1;\pm19\}$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et $d/n^2+3$ et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } d/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12 \text{ et } d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n \text{ et } d/-2+4n \Rightarrow d/13$

**Exercice03 :** $a\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/29$

**Solution03 :** $\begin{cases} a/5x-7 \\ a/2x+3 \end{cases} \Rightarrow a/2(5x-7)-5(2x+3)$

$a/10x-14-10x-15 \Rightarrow a/-29 \Rightarrow a/29$

**Exercice04 :** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ :

3 divise $4^n-1$

**Solution04 :**

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$4^0-1=0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N} / 4^n-1=3k$ donc

$4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N} / 4^{n+1}-1=3k'$ ??

$4^{n+1}-1=4\times4^n-1$

$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}; 4^n-1$ est divisible par 9

**Exercice05 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

**Solution05 :** $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc $n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que

$n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors

$n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

**Exercice 06 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ Représente un entier relatif ?

**Solution06 :** Cette fraction a un sens si : $n+4\neq 0$, soit $n\neq -4$

On constate que $3n+8=3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

**Exercice07 :** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$

b) $2xy+2x+y=99$

**Solution07 :**a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$

On dresse un tableau :

| | | |
|---|---|---|
| $x-y$ | 2 | 4 |
| $x+y$ | 16 | 8 |
| $x$ | 9 | 6 |
| $y$ | 7 | 2 |

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$

$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 20 | 25 | 50 | 100 |
| $y+1$ | 100 | 50 | 25 | 20 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| $x$ | 0 | | | 2 | | 12 | | |
| $y$ | 99 | | | 10 | | 3 | | |

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

**Exercice08 :** Déterminer les restes dans la division par 9 des nombres suivants : $23451^{100}$ ; $100^{23451}$; $23451^{100}+100^{23451}$

**Solution08 :** On a : $23451=3908\times 9+6$

donc : $23451\equiv 6[9]$

donc : $23451\equiv 6^{100}[9]$

et on a : $6=6[9]$ donc $6^2=36[9]\Leftrightarrow 6^2=0[9]$

donc : $(6^2)^{50}=0[9]$ donc : $6^{100}=0[9]$

donc : $23451^{100}=0[9]$ **(1)**

donc le reste dans la division du nombre $23451^{100}$ par 9 est : 0 (cad $23451^{100}$ est divisible par 9 ou on dit que 9 divise $23451^{100}$)

de même on a : $100=11\times 9+1$ donc : $100\equiv 1[9]$

$\Rightarrow 100^{23451}=1^{23451}[9]\Rightarrow 100^{23451}=1[9]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$23451^{100}+100^{23451}=0+1[9]$ car la congruence est compatible avec l'addition

Donc : $23451^{100}+100^{23451}=1[9]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $23451^{100}+100^{23451}$ par 9 est : 1

**Exercice09 :** 1) Montrer que : $5^8\equiv -1[17]$

2)Déterminer les restes dans la division par 17 des nombres suivants : $5^{16}$ ; $5^{500}$.

**Solution09 :** 1)On a : $5^1\equiv 5[17]$ donc

$5^2\equiv 25[17]\Leftrightarrow 5^2\equiv 8[17]$

$5^4\equiv 8^2[17]\Leftrightarrow 5^4\equiv 13[17]$

$5^8\equiv 13^2[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv 169[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv 16[17]\Leftrightarrow 5^8\equiv -1[17]$

2) )On a : $5^8\equiv -1[17]$ donc

$(5^8)^2\equiv(-1)^2[17]\Leftrightarrow 5^{16}\equiv 1[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $5^{16}$ par 17 est : 1

On a : $500=31\times 16+4$

Donc : $5^{500}\equiv 5^{31\times 16+4}[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv(5^{16})^{31}\times 5^4[17]$

$\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 1^{31}\times 5^4[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 5^4[17]\Leftrightarrow 5^{500}\equiv 13[17]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $5^{500}$ par 17 est : 13

**Exercice10 :** $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de $a$ par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de $b$ par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) $a^2+b^2$ 3) $2a-5b$

**Solution10 :** 1)On a : $a\equiv 17[19]$ et $b\equiv 15[19]$

donc : $a+b\equiv 17+15[19]\Leftrightarrow a+b\equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a\equiv 17[19]\Rightarrow a^2\equiv 17^2[19]\Rightarrow a^2\equiv 4[19]$

$b\equiv 15[19]\Rightarrow b^2\equiv 15^2[19]\Rightarrow b^2\equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2\equiv 4+16[19]\Leftrightarrow a^2+b^2\equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a^2+b^2$ Par 19 est : 1

3) $a\equiv 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 2\times 17[19]\Rightarrow 2a\equiv 15[19]$ **(1)**

$b\equiv 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 5\times 15[19]\Rightarrow 5b\equiv 18[19]$

Donc : $5b\equiv -1[19]\Rightarrow -5b\equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$2a-5b\equiv 15+1[19]\Rightarrow 2a-5b\equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

**Exercice11 :** Déterminer le reste de la division du nombres $3^{2007}$ par 2 et par 13

**Solution11 :**1)On a : $3\equiv 1[2]$ donc $3^{2007}\equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $3^{2007}$ Par 2 est : 1

2)On a : $3\equiv 3[13]$ donc

$3^2\equiv 9[13]\Rightarrow 3^3\equiv 27[13]\Rightarrow 3^3\equiv 1[13]$

Et on a : $2007=3\times 669$ donc :

$\left(3^3\right)^{669}\equiv 1^{669}[13]\Rightarrow 3^{2007}\equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $3^{2007}$ Par 13 est : 1

**Exercice12 :** Déterminer le reste de la division du nombres $73^{2019}$ par 7

**Solution12 :**On a : $73\equiv 3[7]$ donc $73^{2019}\equiv 3^{2019}[7]$

$3^{2019}=3^{2018+1}=3^{2\times 1009+1}=\left(3^2\right)^{1009}\times 3^1$

On a : $3^2\equiv 2[7]$ donc : $\left(3^2\right)^{1009}\equiv 2^{1009}[7]$

donc : $3^{2019}\equiv 2^{1009}\times 3[7]$

on a : $1009=336\times 3+1$

donc : $2^{2019}=\left(2^3\right)^{336}\times 2$ et on a : $2^3\equiv 1[7]$

donc : $\left(2^3\right)^{336}\times 2\equiv 2[7]$ par suite : $73^{2019}\equiv 6[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $73^{2019}$ Par 7 est : 6

**Exercice13 :** Déterminer le reste de la division du nombres $19^{52}\times 23^{41}$ par 7

**Solution13 :** On a : $19\equiv 5[7]$ donc $19^2\equiv 4[7]$

donc $19^4\equiv 2[7]$ et on a $52=13\times 4$ donc :

$19^{52}\equiv 2^{13}[7]$

On a : $23\equiv 2[7]$ donc $23^{41}\equiv 2^{41}[7]$

$19^{52}\times 23^{41}\equiv 2^{54}[7]$ ($542=3\times 18$ )

On a : $2^3\equiv 1[7]\Rightarrow 2^{54}\equiv 1[7]$

donc : $19^{52}\times 23^{41}\equiv 1[7]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $19^{52}\times 23^{41}$ Par 7 est : 1

**Exercice14 :** Déterminer le reste de la division par 5 du nombres $22^{33}+33^{22}$

**Solution14 :** On a : $22\equiv 2[5]$ donc $22^{33}\equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33\equiv -2[5]$ donc $33^{22}\equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33}+33^{22}\equiv 2^{33}+2^{22}[5]$

et on a $2^4\equiv 1[5]$ et $33=8\times 4+1$ donc :

$2^{33}=2^{8\times 4+1}=\left(2^4\right)^8\times 2^1$ donc $2^{33}\equiv 2[5]$

on a $2^{22}=\left(2^2\right)^{11}$ et $2^2\equiv -1[5]$ donc $2^{22}\equiv -1[5]$

donc $22^{33}+33^{22}\equiv 2-1[5]$

donc : $22^{33}+33^{22}\equiv 1[5]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33}+33^{22}$ Par 5 est : 1

**Exercice15:** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ 3 divise $4^n-1$

**Solution15 :** Méthode1

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $4^0-1=0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}\,/\,4^n-1=3k$ donc $4^n=3k+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}\,/\,4^{n+1}-1=3k'$ ??

$4^{n+1}-1=4\times 4^n-1$

$=4\times(3k+1)-1=12k+4-1=12k+3=3(4k+1)$

avec $k'=4k+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N};4^n-1$ est divisible par 9

Méthode2

Il suffit de montrer que : $4^n-1\equiv 0[3]$ ??

On a : $4\equiv 1[3]$ donc $4^n\equiv 1[3]$

Donc : $4^n-1\equiv 0[3]$ Cqfd

**Exercice16 :** 1) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division par 7 du nombres $3^n$

2)en déduire le reste de la division par 7 du nombres $2019^{2019}$

**Solution19 :** 1) $3^n\equiv r[7]$ et $r\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$

**On a :** $3^0 \equiv 1[7]$ et $3^1 \equiv 3[7]$ et $3^2 \equiv 2[7]$

et $3^3 \equiv 6[7]$ et $3^4 \equiv 4[7]$ et $3^5 \equiv 5[7]$ et $3^6 \equiv 1[7]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 6k + r$ avec $r \in \{0;1;2;3;4;5\}$

On a : $3^6 \equiv 1[7]$ donc : $\left(3^6\right)^k \equiv 1^k[7]$

donc : $3^{6k} \equiv 1[7]$ et $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ et $3^{6k+2} \equiv 2[7]$

et $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ et $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ et $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

**Exercice17:** Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ : 1) $\overline{2}x = \overline{3}$ 2) $x^2 + \overline{3}x = \overline{0}$

3) $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$

**Solution10 :** On a : $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3}\}$

1)On Dresse une table comme suite :

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{2}x$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ |

Et en utilisant cette une table on déduit que Cette équation n'admet pas de solutions Donc : $S = \varnothing$

1)On Dresse une table comme suite :

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |
| $\overline{3}x$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ |
| $x^2+\overline{3}x$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{2}$ |

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont solutions de l'équation Donc : $S = \{\overline{0};\overline{1}\}$

2) $\overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$

Car : $2013 = 503 \times 4 + 1$

On Dresse une table comme suite :

| $x$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{2}x$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ |
| $x^3+\overline{2}x$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ |

Si $\overline{k} = \overline{0}$ : $S = \{\overline{0};\overline{2}\}$ Si $\overline{k} = \overline{1}$ : $S = \{\overline{3}\}$

Si $\overline{k} = \overline{2}$ : $S = \varnothing$ Si $\overline{k} = \overline{3}$ : $S = \{\overline{1}\}$

**Exercice18 :** Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ l'équations suivants : $x + \overline{3}y = \overline{1}$

**Solution18 :**on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\}$ Comme suite

| | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{1}$ |

$S = \{(\overline{0};\overline{2});(\overline{1};\overline{0});(\overline{2};\overline{3});(\overline{3};\overline{1});(\overline{4};\overline{3});(\overline{4};\overline{4})\}$

**Exercice19 :** Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$

**Solution19 :**

$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overline{3}+\overline{2}\right)x + \left(\overline{2}+\overline{4}\right)y = \overline{3}+\overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{1} \\ y = \overline{4} \end{cases}$ donc $S = \{(\overline{1};\overline{4})\}$

**Exercice20 :** 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division par 10 du nombres $3^n$

2)en déduire le chiffre des unités du nombres $2019^{2020}$

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel $n$ tél que : $3^n + 5n + 2 \equiv 0[10]$

**Solution20 :**1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$

et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$

On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $\left(3^4\right)^k \equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres $2019^{2020}$ est le reste dans la division du nombre $2019^{2020}$ Par 10

cad : on cherche $r$ tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$ ??

On a : $2019 = 2010 + 9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4 \times 1010 = 4 \times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres $2019^{2020}$ est 1

Autre méthode **:** $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

| $n$ | $4k$ | $4k+1$ | $4k+2$ | $4k+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | $\equiv 1[10]$ | $\equiv 3[10]$ | $\equiv 9[10]$ | $\equiv 7[10]$ |
| $5n$ | $\equiv 0[10]$ | $\equiv 5[10]$ | $\equiv 0[10]$ | $\equiv 5[10]$ |
| $3^n+5n+2$ | $\equiv 3[10]$ | $\equiv 0[10]$ | $\equiv 1[10]$ | $\equiv 4[10]$ |

donc : $3^n+5n+2\equiv 0[10] \Leftrightarrow n=3k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$

**Exercice21 :** Déterminer le chiffre des unités du nombres $24537^{2018}$

**Solution21 :** On a : $24537\equiv 7[10]$ donc :

$24537^{2018}\equiv 7^{2018}[10]$ or : $7^2\equiv -1[10]$ donc :

$\left(7^2\right)^{1009}\equiv(-1)^{1009}[10]\equiv -1[10]$

Donc : $24537^{2018}\equiv -1[10]$ donc : $24537^{2018}\equiv 9[10]$

Donc :des unités du nombres $24537^{2018}$ est 9

**Exercice22 :** Déterminer tous les entiers naturels $n$ tel que : $2^n\equiv n^2[9]$

**Solution22 :**on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7};\overline{8}\right\}$ Comme suite

| $\overline{n}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{2^n}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{8}$ | $\overline{7}$ | $\overline{5}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{n}^2$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{4}$ | $\overline{1}$ |

$2^n\equiv n^2[9]\Leftrightarrow \overline{n}=\overline{2}$ ou $\overline{n}=\overline{4}$

$2^n\equiv n^2[9]\Leftrightarrow n=2+9k$ ou $n=4+9k$ avec $k\in\mathbb{N}$

**Exercice23 :** Résoudre dans $\mathbb{N}$ l' équations suivante : $3^n+5n+1\equiv 0[8]$

**Solution23 :** methode1 :
on Dresse une table des opérations de

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7}\right\}$ Comme suite

On a : $3^0\equiv 1[8]$ et $3^1\equiv 3[8]$ et $3^2\equiv 1[8]$

donc : $3^{2k}\equiv 1[8]$ et $3^{2k+1}\equiv 3[8]$

| $\overline{n}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{3^n}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{5n+1}$ | $\overline{1}$ | $\overline{6}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{2}$ | $\overline{7}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{U_n}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ |

$3^n+5n+1\equiv 0[8]\Leftrightarrow \overline{n}=\overline{6}$

$3^n+5n+1\equiv 0[8]\Leftrightarrow n=6+8k$ avec $k\in\mathbb{N}$

**Exercice24 :** Quel est le reste de la division du nombre $22^{33}\times 33^{22}$ par 5?

**Solution24 :** On a : $22\equiv 2[5]$ donc $22^{33}\equiv 2^{33}[5]$

Et on a : $33\equiv -2[5]$ donc $33^{22}\equiv 2^{22}[5]$

donc $22^{33}\times 33^{22}\equiv 2^{33}\times 2^{22}[5]$ donc $22^{33}\times 33^{22}\equiv 2^{55}[5]$

et on a $2^4\equiv 1[5]$ et $55=13\times 4+3$ donc :

$2^{55}=2^{13\times 4+3}=\left(2^4\right)^{13}\times 2^3$donc $2^{55}\equiv 8[5]$ donc

$2^{55}\equiv 3[5]$Par suite : le reste dans la division du nombre $22^{33}\times 33^{22}$ Par 5 est : 3

**Exercice25 :** Quel est le reste de la division du nombre $3^{2019}$ par 2 et par 13?

**Solution25 :**1)On a : $3\equiv 1[2]$ donc $3^{2019}\equiv 1[2]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $3^{2019}$ Par 2 est : 1

2)On a : $3\equiv 3[13]$ donc

$3^2\equiv 9[13]\Rightarrow 3^3\equiv 27[13]\Rightarrow 3^3\equiv 1[13]$

Et on a : $2019=3\times 673$ donc :

$\left(3^3\right)^{673}\equiv 1^{673}[13]\Rightarrow 3^{2019}\equiv 1[13]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $3^{2019}$ Par 13 est : 1

**Exercice26 :** 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$2^{2n}+6n-1$

Est divisible par9

2) En déduire que : $4^n\equiv 3n+1[9]$

**Solution26 :1)**Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$

$\exists k\in\mathbb{N}/2^{2n}+6n-1=9k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=1 nous avons

$2^{2\times 1}+6\times 1-1=9$ est un multiple de 9

Donc P (1) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k\in\mathbb{N}/2^{2n}+6n-1=9k$ donc $2^{2n}=9k-6n+1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$\exists k'\in\mathbb{N}/2^{2n+2}+6(n+1)-1=9k'$ ??

$2^{2n+2}+6(n+1)-1=2^{2n}\times 2^2+6n+6-1$

$=(9k-6n+1)\times 4+6n+5=9\times 4k-24n+4+6n+5$

$=9\times 4k-18n+9=9\times(4k-2n+1)=9\times k'$

avec $k'=4k-2n+1$donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $2^{2n}+6n-1$ Est divisible par9

2) on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $9 / 2^{2n}+6n-1$

Donc : $2^{2n}+6n-1\equiv 0[9]$ Donc : $\left(2^2\right)^n\equiv -6n+1[9]$

et on a : $0\equiv 9n[9]$donc : $4^n\equiv 3n+1[9]$

**Exercice27 :** Quel est le reste de la division du nombre $1653^{351}+43^{137}$ par 11?

**Solution27 :** On a : $1653=150\times 11+3$

$1653\equiv 3[11]$ et $43\equiv -1[11]$ donc $(1653)^{351}\equiv 3^{351}[11]$

$43^{137}\equiv(-1)^{137}[11]$donc : $43^{137}\equiv -1[11]$

On a : $351=70\times 5+1$

donc $(1653)^{351}\equiv 3^{351}[11]\equiv\left(3^5\right)^{70}\times 3[11]\equiv 1\times 3[11]\equiv 3[11]$

donc $1653^{351}+43^{137}\equiv 2[11]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $1653^{351}+43^{137}$ Par 11 est : 2

**Exercice28:** $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=4^n-3n-1$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad U_{n+1}=4U_n+9n$

2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise $4^n-3n-1$

**Solution28 :**

1) $U_{n+1}=4^{n+1}-3(n+1)-1=4^n\times 4-3n-4$

**Or :** $U_n=4^n-3n-1\Leftrightarrow U_n+3n+1=4^n$

Donc : $U_{n+1}=(U_n+3n+1)\times 4-3n-4=4U_n+12n+4-3n-4$

$U_{n+1}=4U_n+9n$

2) (récurrence)

1étapes : Pour n=0 nous avons $9/0$

Donc P (0) est vraie.

2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $9/4^n-3n-1$ donc $9/U_n$

3étapes : Montrons que : $9/U_{n+1}$ ??

On a $9/U_n$ et $9/9$ donc $9/4U_n+9n$ donc $9/U_{n+1}$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a : $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise $4^n-3n-1$

**Exercice29 :**montrer que

$7/1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}$

**Solution29 :**on a : $4\equiv -3[7]$ et $5\equiv -2[7]$ et $6\equiv -1[7]$ donc : $4^{2019}\equiv -3^{2019}[7]$ et $5^{2019}\equiv -2^{2019}[7]$ et $6^{2019}\equiv -1^{2019}[7]$

donc : $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}\equiv 1+(-1)[7]$

Donc : $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+4^{2019}+5^{2019}+6^{2019}\equiv 0[7]$

**Exercice30 :** $n\in\mathbb{N}$ on pose $\alpha_n=n^4-n^2+16$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $n^2+3n+4$ et $n^2-3n+4$ Sont des nombres pairs

2) En déduire que $\alpha_n=n^4-n^2+16$ n'est pas premier

**Solution30 :**1)soit $n\in\mathbb{Z}$ $n^2-3n+4\equiv n^2-n[2]$

donc $n^2-3n+4\equiv n(n-1)[2]$ or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n-1)\equiv 0[2]$ donc $n^2-3n+4\equiv 0[2]$

donc $n^2-3n+4$ est un nombre paire

et on a : $n^2+3n+4\equiv n^2+n[2]$ donc

$n^2+3n+4\equiv n(n+1)[2]$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

donc $n(n+1)\equiv 0[2]$ donc $n^2+3n+4\equiv 0[2]$

donc $n^2+3n+4$ est un nombre paire

2) $\alpha_n=n^4-n^2+16=(n^2+4)^2-9n^2=(n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$

Et puisque $n^2-3n+4$ et $n^2+3n+4$ sont des nombres paire

alors : $n^2-3n+4\neq 1$ et $n^2+3n+4\neq 1$

donc $\alpha_n$ n'est pas un nombre premier

**Exercice31 :** montrer que $\forall a\in\mathbb{Z}\quad a\wedge(a+1)=1$

**Solution31 :** on pose $d=a\wedge(a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$

**Exercice32 :** $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$

1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel $n$ tel que : $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

**Solution32 :**1)on pose $d=A\wedge B$ et $d'=(n+2)\wedge 7$

On a : $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3=(n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2\Rightarrow d/(n+2)\wedge 7\Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d'=(n+2)\wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7\Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A\wedge B$ donc $d'/d$

donc $d/d'$ et $d'/d$ et $d\in\mathbb{N}$ et $d'\in\mathbb{N}$ donc

donc $d=d'$ donc : $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) $\frac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A\wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2\in\{1;7\}$ ce qui entraine que $n=5$

**Exercice33:** $a=(25^n-1)(36^n-1)$ et $b=(5^n-1)(6^n-1)$

Calculer les $a\vee b$ $(n\in\mathbb{N})$

**Solution33 :**

$a=\left((5^n)^2-1\right)\left((6^n)^2-1\right)=(5^n-1)(5^n+1)(6^n-1)(6^n+1)$

$a=b(5^n+1)(6^n+1)$ donc : $b/a$ donc : $a\vee b=a$

**Exercice34 :** Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2-y^2=32$ avec $x\succ y$

b) $2xy+2x+y=99$

**Solution34 :**a) $x^2-y^2=32\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y)=2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32=2^5$

On dresse un tableau :

| | | |
|---|---|---|
| $x-y$ | 2 | 4 |
| $x+y$ | 16 | 8 |
| $x$ | 9 | 6 |
| $y$ | 7 | 2 |

$S=\{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy+2x+y=99\Leftrightarrow 2xy+y+2x+1-1=99$

$\Leftrightarrow y(2x+1)+2x+1=99+1\Leftrightarrow(2x+1)(y+1)=100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100}=\{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 20 | 25 | 50 | 100 |
| $y+1$ | 100 | 50 | 25 | 20 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| $x$ | 0 | | | 2 | | 12 | | |
| $y$ | 99 | | | 10 | | 3 | | |

$S=\{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

**Exercice35 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$

**Solution35 :** $n+2/3n+1$ et $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$et $n+2/3n+6$donc

$n+2/(3n+6)-(3n+1)$ donc$n+2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5

Il faut que $n+2\in\{-1;-5;1;5\}$ ce qui entraine que $n\in\{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que que que si $n\in\{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ;-1 ;3

**Exercice 36 :** Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

**Solution36 :**Cette fraction a un sens si $n+4\neq 0$, soit $n\neq -4$

On constate que $3n+8=3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

**Exercice37 :**déterminer **:** $d=(-8316)\wedge 1080$ et $m=8316\vee 1080$

**Solution 37:** : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316=2^2\times3^3\times7\times11$ et

$1080=2^3\times3^3\times5$

$d=8316\wedge1080=2^2\times3^3=108$ et

$m=8316\vee1080=2^3\times3^3\times5\times7\times11=11880$

**Exercice38** :si $2=a\wedge b$ et $-12=a\times b$

déterminer **:** $a\vee b$

**Solution 38:** on a $a\wedge b)\times(a\vee b)=|ab|$

donc : $a\vee b=|a\times b|/a\wedge b=|-12|/2=6$

**Exercice 39:** $n$ et $a$ et $b$ des entiers naturels

Démontrer que si $q$ est le quotient de la division euclidienne de n par $a$ et $q'$ est le quotient de $q$ par $b$ Alors $q'$ est aussi le quotient de $n$ par $ab$

**Solution39 :** soit $r$ le reste de la division euclidienne de n par $a$ et $r'$ le reste de la division euclidienne de $q$ par $b$ on a donc :

$n=aq+r$ et $0\le r\le a-1$ et on a : $q=bq'+r'$ et $0\le r'\le b-1$ donc on déduit que :

$n=a(bq'+r')+r=abq'+ar'+r$

Et puisque : $0\le r'\le b-1$ et $0\le r\le a-1$ alors : $ar'+r\le ab-1$ donc $n=abq'+ar'+r$

$0\le ar'+r\le b-1$ conclusion : $q'$ est aussi le quotient de $n$ par $ab$

**Exercice 40:** Déterminer le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times23^{41}$ par 7

**Solution40 :**on a $19\equiv 5[7]$ donc $19^2\equiv 4[7]$

donc : $19^4\equiv 2[7]$ donc $19^{52}\equiv 2^{13}[7]$

Et on a $23\equiv 2[7]$ donc $23^{41}\equiv 2^{41}[7]$ donc

$23^{41}\times 19^{52}\equiv 2^{13}\times 2^{41}[7]$

Donc : $23^{41}\times 19^{52}\equiv 2^{54}[7]$

donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv \left(2^3\right)^{18}[7]$

donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv 8^{18}[7]$

et puisque : $8\equiv 1[7]$ donc $23^{41}\times 19^{52}\equiv 1[7]$

Conclusion :1est le reste de la division euclidienne de $19^{52}\times 23^{41}$ par 7

**Exercice41 :** 1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$

$(n+1)^{2019}-1\equiv 0[n]$

2) montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$ $4^{2n+2}\equiv 1[15]$

**Solution41 :1)**on a : $n+1\equiv 1[n]$donc :

$(n+1)^{2019}\equiv 1^{2019}[n]$ donc : $(n+1)^{2019}-1\equiv 0[n]$

2) on a : $4^2\equiv 1[15]$ donc : $\left(4^2\right)^{n+1}\equiv 1^{n+1}[15]$

donc : $4^{2n+2}\equiv 1[15]$

**Exercice42:** $n\in\mathbb{N}$ on pose $U_n=4^n-3n-1$

1)montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $U_{n+1}=4U_n+9n$

2) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise $4^n-3n-1$

**Solution42 :**1)on a $U_{n+1}=4^{n+1}-3(n+1)-1$

donc $U_{n+1}=4\times 4^n-3n-3-1$

et puisque : $U_n=4^n-3n-1$ donc :

$4^n=U_n+3n+1$ donc : $U_{n+1}=4U_n+9n$

2) notons P(n) La proposition suivante :

« 9 divise $U_n$ » .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons

$U_0=4^0-3\times 0-1=0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise $U_n$ »

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « 9 divise $U_{n+1}$ » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1}\equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

« 9 divise $U_n$ » donc $U_n\equiv 0[9]$ donc $4U_n\equiv 0[9]$

Et on a : $9n_n\equiv 0[9]$ donc $U_n+9n_n\equiv 0[9]$ donc

$U_{n+1}\equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ 9 divise $4^n-3n-1$

**Exercice43** : Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation:

$x^2-x-\bar{2}=\bar{0}$

**Solution43** : on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4}\right\}$

Comme suite :

| $x$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ |
| $x^2-x-\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |

Et en utilisant cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S=\left\{\bar{2};\bar{4}\right\}$

**Exercice 44:** $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

**Solution44 :**1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : $\Delta_1/a$ et $\Delta_1/b$ donc $\Delta_1/a$ et $\Delta_1/bc$ donc

$\Delta_1/a-bc$ donc $\Delta_1/d$

donc $\Delta_1/d$ et $\Delta_1/b$ donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc $\Delta_1/\Delta_2$

inversement On a : $\Delta_2/b$ et $\Delta_2/d$ donc $\Delta_2/d$ et

$\Delta_2/bc$ donc $\Delta_2/bc+d$ donc $\Delta_2/a$

donc $\Delta_2/a$ et $\Delta_2/b$ donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc $\Delta_2/\Delta_1$

On a donc : $\Delta_1/\Delta_2$ et $\Delta_2/\Delta_1$ et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a\wedge b=b\wedge d$

2)on a : $a=bc+(a-bc)$ si on prend : $d=a-bc$ et d'après 1) on aura : $a\wedge b=b\wedge d=b\wedge(a-bc)$

**Exercice45 :** $a\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=35a+57$ et $B=45a+76$

montrer que $A\wedge B=1$ ou $A\wedge B=19$

**Solution45 :**1)on pose $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B\Rightarrow d/35a+57$ et $d/45a+76$

$\Rightarrow d/9(35a+57)$ et $d/7(45a+76)$

$\Rightarrow d/315a+513$ et $d/315a+532$

$\Rightarrow d/19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d\in\{1;19\}$ ce qui entraine que :

$A\wedge B=1$ ou $A\wedge B=19$

**Exercice46 :** $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$

1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a)montrer que $a\wedge b=b\wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles $a\wedge b=d$

c)montrer que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

d)en déduire les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$

**Solution46 :**1)on pose $d=x\wedge y$ et $d'=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=x\wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et $d/b$

Car il divise toute combinaison de $x$ et $y$

$\Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/d'$

Inversement :

$d'=a\wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$

$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$

$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x\wedge y \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a) montrons que $a\wedge b=b\wedge 7$ ?

la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$

donne : $n^2+5n+13=(n+3)(n+2)+7$

Donc : $a=b(n+2)+7\Leftrightarrow a-b(n+2)=7$

on pose $d'=b\wedge 7$ et $d=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a-b(n+2)$ et $d/b$

$\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

$d'=b\wedge 7\Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et $d'/b$

$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a\wedge b \Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

b) les valeurs possibles $a\wedge b=d$ ??

on a : $a\wedge b=b\wedge 7=d$

donc : $d/7$ donc : $d=1$ ou $d=7$

c)montrons que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

$n\equiv 4[7]\Leftrightarrow n+3\equiv 0[7]\Leftrightarrow 7/n+3\Leftrightarrow 7/b\Leftrightarrow b\wedge 7=7\Leftrightarrow b\wedge a=7$

d) les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$ ??

$a\wedge b=1\Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4

$n\equiv 0[7]$ ou $n\equiv 1[7]$ ou $n\equiv 2[7]$ ou $n\equiv 3[7]$ ou $n\equiv 5[7]$

ou $n\equiv 6[7]$

**Exercice 47:** $n\in\mathbb{Z}$

on pose : $d_n=(2n+8)\wedge(3n+15)$

1) montrer que $d_n/6$

2)déterminer les les entiers relatifs $n$ tel que $d_n=6$

**Solution47 :**1) on a $d_n=(2n+8)\wedge(3n+15)$

$\Rightarrow d_n/2n+8$ et $d_n/3n+15 \Rightarrow d_n/6n+24$ et $d_n/6n+30$

$\Rightarrow d_n/30-24 \Rightarrow d_n/6$

2) $6=(2n+8)\wedge(3n+15)\Rightarrow 6/2n+8$ et $6/3n+15$

$\Rightarrow \begin{cases}2n+8\equiv 0[6]\\3n+15\equiv 0[6]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2n\equiv 4[6]\\3n\equiv 3[6]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{2n}=\overline{4}\\\overline{3n}=\overline{3}\end{cases}$

On Dresse une table dans

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5}\}$

Comme suite :

| $n$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{2n}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{3n}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ |

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$n=\overline{5}$ Est la solution de l'équation

$n=\overline{5}\Leftrightarrow n=5+6k\ k\in\mathbb{Z}$

Inversement :

Si $n=5+6k\ \ k\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}2n+8\equiv 0[6]\\3n+15\equiv 0[6]\end{cases}$ donc $6/2n+8$ et $6/3n+15$

donc $6/d_n$ et on a $d_n/6$ donc $d_n=6$

**Exercice 48:** $a\in\mathbb{N}^*$ et $b\in\mathbb{N}^*$ et $a\geq 3$ et $a$ est impair et on pose : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

1) a)montrer que $2^{ab}\equiv 1[d]$

b)montrer que $2^{ab}\equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d\in\{1;2\}$

3)montrer que $d=1$

**Solution48 :**1) a)montrons que $2^{ab}\equiv 1[d]$

On a : $d=(2^a-1)\wedge(2^b+1)$

Donc il existent : $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ tels que :
$2^a - 1 = d\alpha$ et $2^b + 1 = d\beta$ donc :
$2^{ab} = \left(2^a\right)^b = \left(d\alpha + 1\right)^b$
Et on a : $d\alpha + 1 \equiv 1[d]$ Donc $(d\alpha+1)^b \equiv 1[d]$
Par suite : $2^{ab} \equiv 1[d]$
1) a)montrons que $2^{ab} \equiv -1[d]$
On a : $2^{ab} = \left(2^b\right)^a = \left(d\beta - 1\right)^a$
Et on a : $d\beta - 11 \equiv -1[d]$ Donc $(d\beta-1)^a \equiv (-1)^a[d]$
et puisque $a$ est impair on a $(d\beta-1)^a \equiv -1[d]$
Par suite : $2^{ab} \equiv -1[d]$
2) $d \in \{1;2\}$ ???
on a : $2^{ab} \equiv 1[d]$ et $2^{ab} \equiv -1[d]$ donc $0 \equiv 2[d]$
donc $d/2$ et on a $d \in \mathbb{N}^*$ donc $d \in \{1;2\}$
3)montrons que $d = 1$
On a : $2^a - 1$ et $2^b - 1$ sont impairs donc $d$ est impair
Et puisque $d \in \{1;2\}$ donc $d = 1$

**Exercice49 :** montrer que : $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

**Solution49 :**on pose $U_n = 2^{4^{n+1}} + 5$
notons P(n) La proposition suivante :
« $U_n \equiv 0[21]$» .Nous allons démontrer par récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $U_0 = 2^4 + 5 = 21$ donc $U_0 \equiv 0[21]$.
Donc P (0) est vraie.
2étapes : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $U_n \equiv 0[21]$
3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que : « $U_{n+1} \equiv 0[21]$» ??
$U_{n+1} = 2^{4^{n+2}} + 5 = 2^{4^{n+1} \times 4^1} + 5 = \left(2^{4^{n+1}}\right)^4 + 5 = \left(U_n - 5\right)^4 + 5$
On a d'après l'hypothèse de récurrence :
$U_n \equiv 0[21]$donc $U_n - 5 \equiv -5[21]$ donc
$(U_n - 5)^4 + 5 \equiv (-5)^4 + 5[21] \equiv 16 + 5[21] \equiv 0[21]$
Donc : $U_{n+1} \equiv 0[21]$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $2^{4^{n+1}} + 5 \equiv 0[21]$

**Exercice 50 :** déterminer le nombre entier naturel $n$ Tel que le quotient de la division euclidienne de $n$ par 25 est $p$ et le reste est $p^2$ $(p \in \mathbb{N})$

**Solution50 :** $n \in \mathbb{N}$
$n = 25p + p^2$ et $0 \le p^2 \prec 25$ donc $0 \le p \prec 5$
Donc :
$\begin{cases} p = 0 \\ n = 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 1 \\ n = 26 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 2 \\ n = 54 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 3 \\ n = 84 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p = 4 \\ n = 116 \end{cases}$
Donc : $n \in \{0;26;54;84;116\}$

**Exercice51:** $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$
si $q$ est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par $b$ déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par $b^{10}$

**Solution51 :** soit $r$ le reste de la division euclidienne de $a-1$ par $b$ donc :
$a - 1 = bq + r$ et $0 \le r \prec b$
Donc : $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$
Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$
Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$
On montre que : $0 \le (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$ ???
On a : $0 \le r \prec b$ donc $0 \le r + 1 \le b$
donc $0 \le (r+1)b^9 \le b^{10}$ donc $0 \le (r+1)b^9 - 1 \le b^{10} - 1$
donc $0 \le (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$
conclusion : $q$ est aussi le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par $b^{10}$

**Exercice52 :** 1)montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$
$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$
2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 3[10]$

**Solution52 :1)**on a : $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$
Donc :
$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$
$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2)n2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$
Donc : $(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}\left(2 + n^2 + 2n\right) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$
$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$
$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2\left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$
on a : $n^2\left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right) \equiv 0[n^2]$
donc : $(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$
2) on a : $7 \equiv 7[10]$ et $7^2 \equiv -1[10]$ donc $7^4 \equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv 1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv 7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv 9[10]$

$7^{4k+3}\equiv 3[10]$

On aussi : $7\equiv 3[4]$ et $7^2\equiv 1[4]$

Donc $7^{2k}\equiv 1[4]$ et $7^{2k+1}\equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

**Exercice53 :**

1)a)en déduire que : $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel $n$ le reste de la division par 5 du nombres $2^n$

2)montrer que $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)montrer que $5 / 1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}$

**Solution53 :** 1) a)on a : $2^4\equiv 1[5]$ donc

$\left(2^4\right)^k\equiv 1^k[5]$ donc $2^{4k}\equiv 1[5]$ donc $2^{4k}\times 2^r\equiv 2^r[5]$

Donc $2^{4k+r}\equiv 2^r[5]\ \forall(k;r)\in\mathbb{N}^2$

b) $2^n\equiv r[5]$ et $r\in\{0;1;2;3;4\}$

Si $n\in\mathbb{N}$ alors : $n=4k+r$ avec $r\in\{0;1;2;3\}$

donc : $2^{4k}\equiv 1[5]$ et $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ et $2^{4k+2}\equiv 4[5]$

et $2^{4k+3}\equiv 3[5]$

2)montrons que $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$ ?

on a : $17\equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2}\equiv 2^{4p+2}[5]$

$32^{4p+3}\equiv -2^{4p+3}[5]$ $17^{4p+2}\equiv 4[5]$

on a : $32\equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3}\equiv 2^{4p+3}[5]$

donc : $32^{4p+3}\equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3}\equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 4+3+3[5]$

donc $17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\equiv 0[5]$

donc $5 / 17^{4p+2}+32^{4p+3}+3\ \forall p\in\mathbb{N}^*$

3)

on a : $1\equiv 1[5]$ et $2\equiv 2[5]$ et $3\equiv -2[5]$ et $4\equiv -1[5]$

donc : $1^{2006}\equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006}\equiv 2^{2006}[5]$ et

$3^{2006}\equiv(-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006}\equiv(-1)^{2006}[5]$

**donc ;** $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2\times 2^{2006}[5]$

$1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+2^{2007}[5]$

Or : $2007=4\times 501+3$ donc : $2^{2007}\equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006}+2^{2006}+3^{2006}+4^{2006}\equiv 2+3[5]\equiv 0[5]$

**Exercice54 :** déterminer le chiffre des unités des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

**Solution54 :**

1) on a : $2019\equiv -1[10]$ donc

$2019^{2020^{2021}}\equiv(-1)^{2020^{2021}}[10]$ et puisque $2020^{2021}$

Est paire donc : $2019^{2020^{2021}}\equiv 1[10]$

le chiffre des unités est 1

2) on a : $1987\equiv 7[10]$ donc $1987^2\equiv 9[10]$

Et $1987^3\equiv 3[10]$ et $1987^4\equiv 1[10]$

Donc : $1987^{4k}\equiv 1[10]$ et $1987^{4k+1}\equiv 7[10]$ et

$1987^{4k+2}\equiv 9[10]$ et $1987^{4k+3}\equiv 3[10]$

$1991^{1983}\equiv ?[4]$

$1991\equiv 3[4]$ et $1991^2\equiv 1[4]$

on a : $1983\equiv 1[2]$ donc : $1991^{1983}\equiv 3[4]$

donc : $1987^{1991^{1983}}\equiv 3[10]$

Le chiffre des unités est 3

**Exercice55 :** soit $N=\overline{dcba}$ un entier naturel

montrer que : $N\equiv a-b+c-d[11]$

**Solution55 :**

on a : $N=\overline{dcba}=a+b\times 10+c\times 10^2+d\times 10^3$

et on a : $10\equiv -1[11]$ et $10^2\equiv 1[11]$ et $10^3\equiv -1[11]$

Donc : $N\equiv a-b+c-d[11]$

**Exercice56 :**

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67\wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs $u$ et $v$ tel que : $39u+67v=1$

**Solution56 :**1)

**(1)** $67=1\times 39+\boxed{28}$ **(2)** $39=1\times 28+\boxed{11}$

**(3)** $28=2\times 11+\boxed{6}$ **(4)** $11=1\times 6+\boxed{5}$

**(5)** $6=1\times 5+\boxed{1}$ **(6)** $5=1\times 5+\boxed{0}$

Donc : $67\wedge 39=1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6=1\times 5+\boxed{1}$ $\Rightarrow$ $6-1\times 5=\boxed{1}$

$\Rightarrow 6-1\times(11-1\times 6)=\boxed{1}\Rightarrow 2\times 6-1\times 11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times(28-2\times 11)-1\times 11=\boxed{1}\Rightarrow 2\times 28-5\times 11=\boxed{1}$

$\Rightarrow 2\times 28-5\times(39-1\times 28)=\boxed{1}\Rightarrow 7\times 28-5\times 39=\boxed{1}$

$\Rightarrow 7\times(67-1\times 39)-5\times 39=\boxed{1}\Rightarrow \boxed{7\times 67-12\times 39=\boxed{1}}$

**Exercices pour le 2bac sm**

**Exercice57 :** montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$

**Solution57 :** on a : $7(3n+1)-3(7n+2)=1$

Donc : $\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$u(3n+1)+v(7n+2)=1 \quad u=7$ et $v=-3$

Donc d'après le théorème de Bézout on a :
$(3n+1)\wedge(7n+2)=1$

**Exercice58 :** montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :
$\begin{cases} n\equiv 2[11] \\ n\equiv 3[7] \end{cases}$

**Solution58 :** $\begin{cases} n\equiv 2[11] \\ n\equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n=11x+2 \\ n=7y+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / 11x+2=7y+3$

$\Leftrightarrow \exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / 11x-7y=1$ Or on sait que :

$7\wedge 11=1$ Donc d'après le théorème de Bézout :
$\exists(u;v)\in\mathbb{Z}^2 / 11u+7v=1$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases} x=u \\ y=-v \end{cases}$

Donc $\exists(x;y)\in\mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n=11x+2 \\ n=7y+3 \end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

**Exercice59 :** résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E)\ 7(x-2)=3(y+1)$

**Solution59 :** $7(x-2)=3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$

Or on sait que : $7\wedge 3=1$
Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$
Donc $\exists k\in\mathbb{Z} / y+1=7k \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1$

$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3(y+1) \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3\times 7k \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3k \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+2 \\ \exists k\in\mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$

Donc $S=\{(3k+2;7k-1)/k\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice60 :** déterminer l'entier naturel $n$ tel que : $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$

**Solution60 :** 1) 2) $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n+1/n(n^2+3n-2)$

or on a : $1=(n+1)\wedge n$ car $(n+1)-n=1$ (bezout)

Donc : $n+1/n^2+8n-2$

La division euclidienne de $n^2+3n-2$ par $n+1$
Donne : $n^2+3n-2=(n+1)(n+2)-4$

$n+1/n^2+3n-2$ et $n+1/n+1 \Rightarrow n+1/n^2+3n-2-(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow n+1/-4 \Rightarrow n+1/4$

Il faut que $n+1\in\{1;2;4\}$ ce qui entraine :

$n\in\{0;1;3\}$

Inversement : On vérifie que 0 ;1 ;3 vérifient
$\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N}$ Avant de conclure que :
$\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n\in\{0;1;3\}$

**Exercice61 :** déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples
$(x;y)/\begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=4 \end{cases}$ avec $x\le y$

**Solution61 :** $\begin{cases} x+y=48 \\ x\wedge y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / \begin{cases} x=4x' \\ y=4y' \\ x+y=48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / 4x'+4y'=48$

$\Leftrightarrow \exists(x';y')\in\mathbb{N}^2 / x'+y'=12$

on Dresse une table comme suit :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y'$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| $x$ | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| $y$ | 48 | 44 | 40 | 36 | 32 | 28 | 24 |

Donc :
$S=\{(0;48);(4;44);(8;40);(12;36);(16;32);(20;28);(24;24)\}$

**Exercice62:** résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

**Solution5762:**
$\begin{cases} 2x\equiv 3[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\equiv -4[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv -2[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

Car $2\wedge 7=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 5[7] \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k;k\in\mathbb{Z} \\ 3x\equiv 1[5] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k;k\in\mathbb{Z} \\ 3(5+7k)\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k;k\in\mathbb{Z} \\ k\equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5+7k;k\in\mathbb{Z} \\ k=1+5k' \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=5+7(1+5k');k'\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=35k'+12;k'\in\mathbb{Z}$

$S=\{35k'+12;k'\in\mathbb{Z}\}$

**Exercice63:** 1)Montrer que : $\forall a\in\mathbb{Z}^*$ et $\forall b\in\mathbb{Z}^*$

on a : $a\wedge b=1\Rightarrow\begin{cases} a\wedge(a+b)=1\\ b\wedge(a+b)=1\\ a\wedge b(a+b)=1\\ (a+b)\wedge ab=1\end{cases}$

**Solution63:** on pose $d=a\wedge(a+b)$ montrons que :

$d=1$ on a : $d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/(a+b)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/(a+b-a)$ $\Rightarrow d/a$ et $d/b\Rightarrow d/(b\wedge a)\Rightarrow$

$d/1\Rightarrow d=1$ ce qui entraine: $1=a\wedge(a+b)$ **(1)**

de même on montre que : $1=b\wedge(a+b)$ **(2)**

de **(1)** et **(2)** en déduit que **:** $(a+b)\wedge ab=1$

D'après une proposition

Et on a $a\wedge(a+b)=1$ et $a\wedge b=1$ donc

$a\wedge b(a+b)=1$ D'après la même proposition

**Exercice64 :** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$

$(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

**Solution64 :on a :** $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5)-2(n+2)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+2)\wedge(2n+5)=1$ **(1)**

De même : on a : $2(n+3)-(2n+5)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+3)\wedge(2n+5)=1$ **(2)** de **(1)** et **(2)** en déduit

que : $(2n+5)\wedge((n+3)(n+2))=1$

Donc : $(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

**Exercice65 :** en utilisant Fermat Montrer que :

1) $3^{13}+5^{35}+7^{57}\equiv1[11]$

2) $2^{16n+1}+7^{32n+2}\equiv0[17]$

**Solution65 :** 1)On a :11 est premier et 11 ne divise pas 3 alors $3^{10}\equiv1[11]$ Donc : $3^{13}\equiv3^3[11]\equiv5[11]$

De même : On a :11 est premier et 11 ne divise pas 5 alors $5^{10}\equiv1[11]$ Donc : $5^{35}\equiv5^5[11]\equiv1[11]$

De même : On a :11 est premier et 11 ne divise pas 7 alors $7^{10}\equiv1[11]$

Donc : $7^{57}\equiv7^7[11]\equiv6[11]$

Finalement on a : $3^{13}+5^{35}+7^{57}\equiv5+1+6[11]\equiv1[11]$

2) $2^{16n+1}+7^{32n+2}\equiv0[17]$ ??

On a :17 est premier et 17 ne divise pas 2 alors $2^{16}\equiv1[17]$ donc : $2^{16n+1}\equiv2^1[17]\equiv2[17]$

De même : On a :17 est premier et 1è ne divise pas 7 alors $7^{16}\equiv1[17]$ donc : $7^{32}\equiv1[17]$

donc : $7^{32n+2}\equiv7^2[17]\equiv15[17]$

Finalement on a : $2^{16n+1}+7^{32n+2}\equiv0[17]$

**Exercice66 :** écrire dans le système de numération a base 3 le nombre 73

**Solution66 :**

1)On a : $73=3\times24+1$ $q_0=24$ et $r_0=1$

$24=3\times8+0$ $q_1=8$ et $r_1=0$

$8=3\times2+2$ $q_2=2$ et $r_2=2$

$2=3\times0+2$ $q_3=0$ et $r_3=2$

Donc : $73=\overline{r_3r_2r_1r_0}_{(3)}=\overline{2201}_{(3)}$

$73=2\times3^3+2\times3^2+0\times3^1+1\times3^0$

**Exercice67 :** déterminer les entiers naturels $x$ et $y$ tel que : $\overline{x0y}_{(5)}=\overline{y0x}_{(7)}$

**Solution67 :**

$\overline{x0y}_{(5)}=\overline{y0x}_{(7)}\Leftrightarrow x\times5^2+0\times5^1+y\times5^0=y\times7^2+0\times7^1+x\times7^0$

$\Leftrightarrow 25x+y=x+49y\Leftrightarrow 48y=24x\Leftrightarrow 2y=x$

$\Leftrightarrow(x;y)=(2k;k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $0\le x\le3$ et

$0\le y\le3$ Donc : $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

**Exercice68 :1)** résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\bar2x^3+x+\bar3=\bar0$

2) déterminer les entiers naturels $n$ tels que :

7 divise $\overline{2013}_{(n)}$

**Solution68 :** On Dresse une table dans

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\bar0;\bar1;\bar2;\bar3;\bar4;;\bar5;\bar6\}$ Comme suite :

| $n$ | $\bar0$ | $\bar1$ | $\bar2$ | $\bar3$ | $\bar4$ | $\bar5$ | $\bar6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar2x^3$ | $\bar0$ | $\bar2$ | $\bar2$ | $\bar5$ | $\bar2$ | $\bar5$ | $\bar5$ |
| $\bar2x^3+x+\bar3$ | $\bar3$ | $\bar6$ | $\bar0$ | $\bar4$ | $\bar2$ | $\bar6$ | $\bar0$ |

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar2$ et $\bar6$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S=\{\bar2;\bar6\}$

2) $\overline{2013}_{(n)}=2\times n^3+0\times n^2+1\times n^1+3\times n^0=2n^3+n+3$

7 divise $\overline{2013}_{(n)}\Leftrightarrow 2n^3+n+3\equiv0[7]$

$\Leftrightarrow\bar2n^3+n+\bar3=\bar0$ Donc : $n=\bar2$ ou $n=\bar6$

Donc : $n=7k+2/k\in\mathbb{N}$ ou $n=7k+6/k\in\mathbb{N}$

**« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »**
**Dit un proverbe.**
**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs**
**et exercices**
**Que l'on devient un mathématicien**