1 – أ – لنبين A و B و C غير مستقيمية

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2,0,2)$

و $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$

وبما أن $\frac{2}{-1} \neq \frac{0}{1}$

فإن المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين .

إذن A و B و C نقط غير مستقيمية .

ب – معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء، لدينا :

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x - 2y + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$$

معادلة ديكارتية إذن للمستوى (ABC) هي بالفعل $x + y - z + 1 = 0$

ملحوظة :

يمكن الإجابة على السؤال بإثبات أن مثلوث إحداثيات كل من النقط A وB وC غير المستقيمية تحقق المعادلة المقترحة $x + y - z + 1 = 0$.

2- معادلة ديكارتية للمستوى (Q)

لتكن M(z,y,z) نقطة من الفضاء، لدينا :

$$M \in (Q) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 5y + 2z - 2 = 0$$

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) هي:

$$3x + 5y - 2z + 2 = 0$$

3-أ- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

المستقيم (Δ) يمر من النقطة $E(2,0,4)$ وموجه بالمتجهة $\vec{w}(4,-2,1)$ إذن تمثيل بارامتري له هو:

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -2t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- إحداثيات N

لدينا : $(ABC): x + y - z + 1 = 0$

و $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -2t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

والمعادلة : $(2+4t) - 2t - (4+t) + 1 = 0$ تكافئ t = 1

إذن مثلوث إحداثيات N نقطة تقاطع (ABC) و (Δ) هو (6,-2,5)

ج- لنبين أن $(\Delta)\subset(Q)$

لدينا : $(Q): 3x+5y-2z+2=0$

و $(\Delta): \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -2t \\ z = 4+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

والمعادلة : $3(2+4t)+5(-2t)-2(4+t)+2=0$

تكافئ $12t-10t-2t+6-8+2=0$

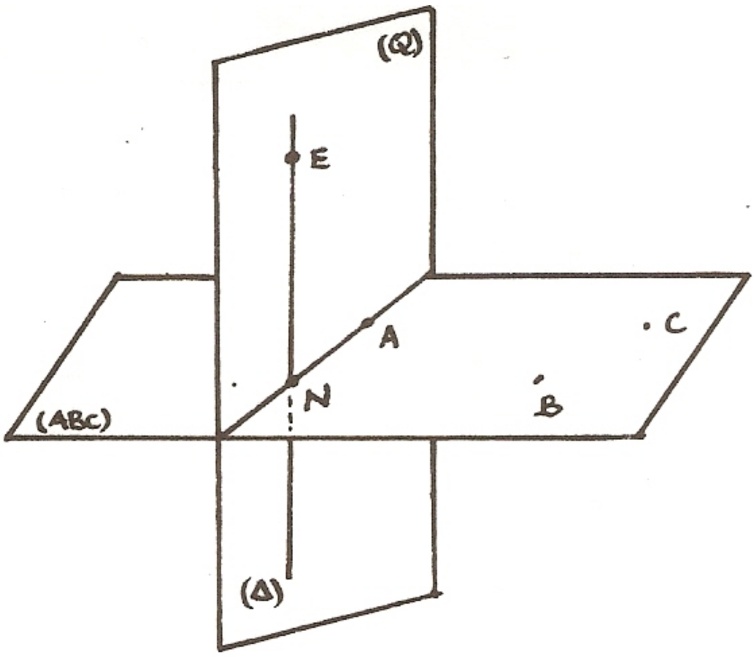
أي 0=0

إذن جميع نقط المستقيم (Δ) تنتمي إلى المستوى (Q)

وهذا يعني أن $(\Delta)\subset(Q)$.

ملحوظة : يمكن الإجابة على السؤال بإثبات أن النقطتين E و N المنتميتين إلى (Δ) تنتميان إلى (Q).

4- استنتاج تقاطع (ABC) و (Q)



لدينا : $(ABC): x+y-z+1=0$

و $(Q): 3x+5y-2z+2=0$

و بما أن : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

فإن (ABC) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم

لدينا : $A\in(ABC)$ و $A\in(Q)$

ولدينا : $N\in(ABC)$ لأن $\{N\}=(\Delta)\cap(ABC)$

و $N\in(Q)$ لأن $N\in(\Delta)$ و $(\Delta)\subset(Q)$

إذن $(ABC)\cap(Q)=(AN)$