مبادئ في المنطق

العبارة

العبارة هي كل نص رياضي صحيح لغويا و معناه يمكن أن يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت

الدالة العبارية

هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة

المكممات

المكمم الكوني

لتكن $P(x)\;;\; x \in E$

العبارة $(\forall x \in E):\;\; P(x)$ **تقرأ مهما يكن** x **من** E **لدينا** $P(x)$ **أو تقرأ لكل** x **من** E **لدينا** $P(x)$ **و هي تعني أن جميع عناصر المجموعة** E **تحقق** $P(x)$

الرمز $\forall$ **يسمى المكمم الكوني**

المكمم الوجودي

لتكن $P(x)\;;\; x \in E$

- **العبارة** $(\exists x \in E):\;\; P(x)$ **تعني يوجد عنصر** x **على الأقل من** E **يحقق** $P(x)$

الرمز $\exists$ **يسمى المكمم الوجودي**

- **العبارة** $(\exists! x \in E):\;\; P(x)$ **تعني يوجد عنصر وحيد** x **من** E **يحقق** $P(x)$

الرمز $\exists!$ **يسمى المكمم الوجودي بالوحدانية**

إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فترتيبها غير مهم أما إذا كانت من طبيعيتين مختلفتين فترتيبها مهم

العمليات المنطقية

نفي عبارة

نفي عبارة P هي عبارة نرمز لها ب $\overline{P}$ أو $nonP$
$\overline{P}$ تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت P صحيحة

P	$\overline{P}$
1	0
0	1

نفي عبارات مكممة

- نفي العبارة : $(\forall x \in E): \quad P(x)$ هي العبارة : $(\exists x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- نفي العبارة : $(\exists x \in E): \quad P(x)$ هي العبارة : $(\forall x \in E): \quad \overline{P(x)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\forall y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\exists y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$
- نفي العبارة : $(\forall x \in E)(\exists y \in F): \quad P(x,y)$ هي العبارة : $(\exists x \in E)(\forall y \in F): \quad \overline{P(x,y)}$

الإستدلال بالمثال المضاد:

- ✓ للبرهنة على أن عبارة ما P خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها $\overline{P}$ صحيح
- ✓ للبرهنة على أن العبارة $(\forall x \in E): \quad P(x)$ خاطئة يكفي إيجاد على الأقل عنصر x من E بحيث تكون $\overline{P(x)}$ صحيحة

الفصل المنطقي

نرمز لفصل عبارتين P و Q بالرمز : (Q أو P) أو $(P \vee Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين P و Q صحيحة.

P	Q	$(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العطف المنطقي

نرمز لعطف عبارتين P و Q بالرمز : (Q و P) أو $(P \wedge Q)$ و هو عبارة تكون صحيحة فقط في حالة إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا .

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	1	1

1	0	0
0	1	0
0	0	0

الإستلزام

نرمز لإستلزام عبارتين P و Q بالرمز : $P \Rightarrow Q$ و نقرأ P تستلزم Q أو إذا كان P فإن Q و هو يكون خاطئا في حالة واحدة هي أن تكون P صحيحة و Q خاطئة

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

التكافؤ المنطقي

نرمز لتكافؤ عبارتين P و Q بالرمز : $P \Leftrightarrow Q$
و نقرأ (P تكافئ Q) أو (P تعني Q) أو (P إذا وفقط إذا كان Q)
و هو يعني ($P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$)
ويكون التكافؤ صحيحا إذا كانت ل P و Q نفس قيم الحقيقية

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

القوانين المنطقية

قوانين مورغان

لتكن P و Q عبارتين ، لدينا :

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q} \qquad \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$$

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، لدينا :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $\left[\left(P \Leftrightarrow Q\right) \wedge \left(Q \Leftrightarrow R\right)\right] \Rightarrow \left(P \Leftrightarrow R\right)$ قانون منطقي

قانون الإستلزام المضاد للعكس

العبارة $\left(P \Rightarrow Q\right) \Leftrightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$ قانون منطقي

قانون الخلف

العبارة $\left[\left(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\right) \wedge \left(\overline{P} \Rightarrow Q\right)\right] \Rightarrow P$ قانون منطقي

قانون فصل الحالات

العبارة $\left[\left(P \Rightarrow Q\right) \wedge \left(Q \Rightarrow R\right)\right] \Rightarrow \left[\left(P \vee Q\right) \Rightarrow R\right]$ قانون منطقي

مبدأ الترجع

لتكن $P\left(n\right)$ خاصية لمتغير صحيحي طبيعي n

- إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون $P\left(n_0\right)$ صحيحة
- إذا كانت العبارة $P\left(n\right) \Rightarrow P\left(n+1\right)$ $\left(\forall n \geq n_0\right)$ صحيحة

فإن العبارة $P\left(n\right)$ $\left(\forall n \geq n_0\right)$ صحيحة