

مبادئ في المنطق

I- تعاريف ومصطلحات

1- العبارة - الدالة العبارية

أ- العبارة

نشاط

ضع العلامة \times في الخانة المناسبة

لا يمكن الحكم على صحتها أو خطئها بدون نقاش	خاطئ	صحيح	نص رياضي	
			$-8 \times -4 = -32$	p
			مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي	q
			كل عدد فردي هو عدد أولي	r
			$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$	s
			الدالة $x \rightarrow x^2$ حيث $x \in \mathbb{R}$ دالة زوجية	t
			x و y عنصران من \mathbb{R} / $x \leq y$.	$p(x; y)$
			$(x \in \mathbb{R}) : x^2 - x \geq 0$	$p(x)$

أ- تعريف

نسمي عبارة كل جملة خبرية تحمل معنى و يكون صحيحا أو خاطئا و لا يمكن أن يكون صحيحا و خاطئا في نفس الوقت. نرمز للعبارة بأحد الرموز p أو q أو r

أمثلة النصوص p و q و r و s و t عبارات

النصان $p(x; y)$ و $p(x)$ ليس بعبارتين

ب- الدالة عبارية

في النشاط السابق

* إذا عوضنا x و y بعددين معلومين في التعبير x و y عنصران من \mathbb{R} / $x \leq y$ نحصل على عبارة.

مثلا من أجل $y = -6$ $x = 1$ نحصل على $1 \leq -6$ عبارة خاطئة

من أجل $y = 4$ $x = 1$ نحصل على $1 \leq 4$ عبارة صحيحة

لذا نقول التعبير " x و y عنصران من \mathbb{R} / $x \leq y$ " دالة عبارية

* التعبير " $(x \in \mathbb{R}) : x^2 - x \geq 0$ " دالة عبارية لأن إذا عوضنا x بأي قيمة من \mathbb{R} نحصل على عبارة

مثلا من أجل $x = 2$ $2^2 - 2 \geq 0$ عبارة صحيحة

من أجل $x = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq 0$ عبارة خاطئة

تعريف

كل نص رياضي يحتوي على متغير أو (متغيرات) ينتمي (أو تنتمي) إلى مجموعة معينة و يصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة يسمى دالة عبارية

2- المكيمات - العبارات المكيمة

أ- المكيم الوجودي

لتكن $p(x)$ دالة عبارية

العبارة $(\exists x \in E) : p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$.

الرمز \exists يسمى المكيم الوجودي .

إذا كان يوجد عنصرا وحيدا x من E يحقق $p(x)$ فإننا نكتب $(\exists! x \in E) : p(x)$

ب- المكتم الكوني

لتكن $x \in E$ دالة عبارية $p(x)$;
 العبارة $p(x)$: $(\forall x \in E)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$. تقرأ لكل x من E ,
 $p(x)$ محقق (أو صحيحة).
 الرمز \forall يسمى المكتم الكوني.

أمثلة

ضع العلامة \times في الخانة المناسبة

صحيحة	خاطئة	العبارة
	\times	$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$
\times		$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}$
\times		$\exists! x \in [0; \pi] \quad \cos x = \frac{1}{2}$
	\times	$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$
\times		$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$
	\times	$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 1$

د- العبارات المكتمة

لتكن $p(x; y)$ دالة عبارية معرفة معرفة على $E \times F$
 نطبق أحد المكتمين على الخاصية $p(x; y)$ بالنسبة للمتغير x
 مثلاً المكتم الكوني، نحصل على $(\forall x \in E) : p(x; y)$
 دالة عبارية للمتغير y وهي غير مرتبطة بـ x .
 نطبق عليها أحد المكتمين بالنسبة للمتغير y . مثلاً المكتم الوجودي،
 فنحصل على العبارة $(\exists y \in F) (\forall x \in E) p(x; y)$.

أمثلة

$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y^2 = x$ عبارة خاطئة (نأخذ $x = -1$)
 $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x + y = -2$ عبارة صحيحة
 $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) x + y = -2$ عبارة خاطئة
 $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) |x + y| \leq |x| + |y|$ عبارة صحيحة.
 $(\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 3$ عبارة صحيحة.

ملاحظة هامة

ترتيب مكتمات من نفس الطبيعة ليس له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكتمة.
 ترتيب مكتمات من طبيعة مختلفة له أهمية في تحديد المعنى التي تحمله العبارة المكتمة .

II- العمليات المنطقية

1- نفي عبارة

نشاط: في حوار جرى بين فاطمة و أحمد , أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد و كل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة , أنقل الجدول التالي إلى دفترك ثم أمله :

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$			
	$\sqrt{7} + \sqrt{2} < 5$		
49 عدد اولي			
	$\sqrt{(-2)^2} = -2$		

أ- تعريف

نفي عبارة p هي عبارة نمرز لها \bar{p} أو $\neg p$ تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة. \bar{p} تقرأ نفي p

في جدول الحقيقة: Tableau de vérité

إذا كانت العبارة صحيحة نمرز لصحتها بالرمز 1 أو \vee وإذا كانت خاطئة نمرز لعدم صحتها 0 أو F

جدول حقيقة \bar{p}

\bar{p}	p
0	1
1	0

أمثلة نفي العبارة $1 < \sqrt{2}$ هي العبارة $1 \geq \sqrt{2}$
نفي العبارة $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ هي العبارة $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

ب- نفي عبارة مكتمة

* نفي العبارة $\forall x \in E \ A(x)$ هي العبارة $\exists x \in E \ \overline{A(x)}$
* نفي العبارة $\exists x \in E \ A(x)$ هي العبارة $\forall x \in E \ \overline{A(x)}$
* نفي العبارة $(\forall x \in E) \ (\forall y \in F) \ A(x;y)$ هي العبارة $(\exists x \in E) \ (\exists y \in F) \ \overline{A(x;y)}$
نفي العبارة $(\exists x \in E) \ (\forall y \in F) \ A(x;y)$ هي العبارة $(\forall x \in E) \ (\exists y \in F) \ \overline{A(x;y)}$
مثال اعط نفي العبارة التالية $(\forall z > 0) \ (\exists x \in]0;1[) \ (\exists y \in]0;1[) : x^2 + y^2 < z$

د- نتيجة (الاستدلال بالمثال المضاد)

للبهتان على أن عبارة ما p خاطئة ، يكفي أن نبين أن نفيها \bar{p} صحيحة.

للبهنة على خطأ $[(\forall x \in E) : A(x)]$ يكفي أن نبهن صحة $[(\exists x \in E) : \overline{A(x)}]$

تطبيق بين أن $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) خاطئة

نعتبر $x = -2$ $-2 + \frac{1}{-2} = \frac{-5}{2} < 2$ ادن لدينا $x + \frac{1}{x} < 2$ ($\exists x \in \mathbb{R}^*$) عبارة صحيحة

ومنه $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^*$) خاطئة

2- الفصل المنطقي

تعريف

فصل العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت على الأقل إحدى العبارتين p و q صحيحتين . و تكتب (p أو q) نكتبها أيضا $p \vee q$

جدول حقيقة $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ أو $5 > 2$ صحيحة

العبارة $2^2 = -4$ أو $-3 \geq 1$ خاطئة

ملاحظة

* العبارتان (p أو q) و (q أو p) تحملان نفس المعنى نقول عملية الفصل تبادلية

* العبارتان r أو $(p$ أو $q)$ و $(r$ أو $p)$ أو q وتحملان نفس المعنى، نقول عملية الفصل تجميعية.

3- العطف المنطقي

تعريف

عطف العبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معاً. وتكتب $(p$ و $q)$ نكتبها أيضاً $p \wedge q$

جدول حقيقة $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

مثال

العبارة $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$ و $5 > 2$ خاطئة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0)$ و $-3 < 1$ صحيحة

ملاحظة

* العبارتان $(p$ و $q)$ و $(q$ و $p)$ تحملان نفس المعنى نقول عملية العطف تبادلية
* العبارتان r و $(p$ و $q)$ و $(q$ و $p)$ و $(p$ و $r)$ تحملان نفس المعنى، نقول عملية العطف تجميعية.
* $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ و $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ بين ذلك

4- الاستلزام

تعريف

استلزام العبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة. وتكتب $p \Rightarrow q$ تقرأ p تستلزم q

جدول حقيقة $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

أمثلة

العبارة $(\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 \geq 0) \Rightarrow 4+1=5$ صحيحة

العبارة $2 > 1 \Rightarrow -1 = 2+3$ خاطئة

العبارة $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5-1=20$ صحيحة

العبارة $(\forall \in \mathbb{R} \ |x| \geq 0) \Rightarrow 2-1=1$ صحيحة

اصطلاح إذا كانت العبارة $p \Rightarrow q$ صحيحة، نقول إن q استنتاج منطقي للعبارة p .

ملاحظة

* العبارتان $p \Rightarrow q$ و $(\overline{p} \vee q)$ تحملان نفس المعنى

* $p \Rightarrow q$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.

* للبرهنة على أن $p \Rightarrow q$ صحيحة، يكفي أن نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.

نقول إن p شرط كاف لتحقيق q

تمرين تطبيقي

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\text{بين أن } -2 \leq x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-3x+5}{x+4} \leq \frac{11}{2}$$

$$(\text{نفترض أن } -2 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ و نبين أن } \frac{-3x+5}{x+4} \leq \frac{11}{2})$$

5- التكافؤ المنطقي

تعريف

ليكن p و q عبارتين
 العبارة ($p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$) تسمى تكافؤ العبارتين p و q وتكون صحيحة إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة و نرسم لها بـ $p \Leftrightarrow q$ و تقرأ p تكافؤ q أو p إذا وفقط إذا q أو p شرط لازم و كاف لتحقيق q

جدول حقيقة $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة العبارة (5 عدد فردي $\Leftrightarrow 3 > 2$) صحيحة
 العبارة (-1 عدد موجب $\Leftrightarrow 5+2=3$) صحيحة
 العبارة ($-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 2 > 1$) خاطئة

ملاحظة

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ * نقول إن التكافؤ عملية تبادلية
 $(p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$ * نقول إن التكافؤ عملية تجميعية

تمارين

نقترح عليك برهانين نستعمل فيهما الرمز " \Leftrightarrow " بطريقة مسترسلة . أحد البرهانين خاطئ. و المطلوب منك التعرف عليه مع إعطاء تعليل لجوابك.

1) ليكن x من \mathbb{R} لدينا : $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4$
 $\Leftrightarrow x^2 \geq 1$
 $\Leftrightarrow x \geq 1$

2) ليكن x من \mathbb{R}_+ لدينا : $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

تمارين

باستعمال جداول الحقيقة بين أن
 $(\bar{p} \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ و $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
 $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge q)$ صحيحة

III- القوانين المنطقية

كل عبارة مكونة من عبارتين أو عدة عبارات $p; q; r; \dots$ مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت العبارات $p; q; r; \dots$ تسمى قانونا منطقيا

1- أنشطة

بين أن العبارات التالية قوانين منطقية

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q, p \Leftrightarrow \bar{\bar{p}}, p \vee \bar{\bar{p}}$$

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

ملاحظة و اصطلاح

* لدينا $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي و يسمى القاعدة العامة للاستدلال الاستنتاجي .
للبرهان على صحة العبارة q

نبين أن الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيحا حيث p عبارة ما صحيحة، ثم نستنتج أن q صحيحة.

* لدينا $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ قانون منطقي نقول إن الاستلزام عملية متعدية.

2- بعض القوانين المنطقية

*أ- قوانين مورگان LOIS DE MORGAN

العبارات التالية قوانين منطقية
$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

تطبيق حل في \mathbb{R}^2 النظمة

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

الحل

$$(x; y) \in S \Leftrightarrow 2x - y = 2 \wedge (x - y = 0 \vee x + y = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y = 2 \wedge x - y = 0) \\ \vee (2x - y = 2 \wedge x + y = 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \wedge y = 2) \vee \left(x = \frac{2}{3} \wedge y = -\frac{2}{3} \right)$$

$$S = \left\{ (2; 2); \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) \right\} \text{ اذن}$$

تمرين

اعط نفي العبارات $\forall x \in \mathbb{R}: x + 1 \geq 0 \vee x^2 - 1 < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (x; y) \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x + y}{1 + xy} \leq 1$$

*ب- قانون التكافؤات المتتالية

العبارة $[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)] \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ قانون منطقي

نتيجة (الاستدلال بالتكافؤات المتتالية)

نستنتج من هذا القانون أنه اذا كان $(A \Leftrightarrow B)$ و $(B \Leftrightarrow C)$ فان $(A \Leftrightarrow C)$ صحيحا.

تمرين

ليكن $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{بين أن } \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x; y) = (2; 8)$$

*د- قانون الاستلزام المضاد للعكس

العبارة $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ قانون منطقي

ملاحظة

في بعض الأحيان يصعب البرهان على صحة $A \Rightarrow B$

فلجأ الى البرهان على صحة $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ثم نستنتج صحة $A \Rightarrow B$

هذا البرهان يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

تمرين ليكن $x \in \mathbb{R}$
بين أن $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$

نتيجة

قانون منطقي $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B})$

*ج- قانون الخلف

قانون منطقي $((\bar{B} \Rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{B} \Rightarrow C)) \Rightarrow B$

نتيجة (الاستدلال بالخلف)

نفترض أن \bar{B} صحيحة ، ونبين أن $\bar{B} \Rightarrow \bar{C}$ صحيحة (أي \bar{C} صحيحة)
حيث C عبارة ما صحيحة (أي $\bar{B} \Rightarrow C$ صحيحة)
و هذا تناقض لأن C لا يمكن أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت . ثم نستنتج أن B صحيحة.
هذا نوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

تمرين برهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

* ر- قانون فصل الحالات

قانون منطقي $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow [(A \vee B) \Rightarrow C]$

ملاحظة

إذا كانت $A \vee B$ صحيحة فانه للبرهنة على صحة C ، نبين أن $A \Rightarrow C$ صحيحة و $B \Rightarrow C$ صحيحة ،
ثم نستنتج أن C صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات

عمليا نطبق $C \Rightarrow [(A \Rightarrow C) \wedge (\bar{A} \Rightarrow C)]$ لأن $A \vee \bar{A}$ صحيحة دائما.

تمرين حل في \mathbb{R} المعادلة $x^2 - |x-1| + 1 = 0$

VI- مبدأ التراجع

خاصية

لتكن $p(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي

إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $p(n_0)$ صحيحة .

و إذا كانت العبارة $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ صحيحة. $\forall n \geq n_0$ فان العبارة $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة.

ملاحظة

للبرهان على أن $(\forall n \geq n_0) : p(n)$ صحيحة، نتبع الخطوات التالية

• التحقق :

نتحقق أن العبارة $p(n_0)$ صحيحة

• افتراض التراجع :

نفترض أن العبارة $p(n)$ صحيحة $n \geq n_0$ و نبين أن $p(n+1)$ صحيحة.

هذا الاستدلال يسمى الاستدلال بالتراجع

تمرين بين بالتراجع $\forall n \geq 4$ $2^n \geq n^2$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$