مبادئ في المنطق تمارين

العمليات على العبارات

- ❖ نفي العبارة P هو العبارة التي نرمز لها بالرمز $\overline{P}$ (أو $\rceil P$) والتي تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة
- ❖ عطف عبارتين هو العبارة (P و Q) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا
- ❖ فصل عبارتين هو العبارة (P أو Q) والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان P و Q خاطئتين معا
- ❖ استلزام عبارتين هو العبارة ($P \Rightarrow Q$) والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة و Q خاطئة
- ❖ تكافئ عبارتين هو العبارة ($P \Leftrightarrow Q$) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا

نفي عبارة مكممة

نفي العبارة $(\forall x \in E);P(x)$ هي العبارة $(\exists x \in E);\overline{P(x)}$

نفي العبارة $(\exists x \in E);P(x)$ هي العبارة $(\forall x \in E);\overline{P(x)}$

نفي العبارة $(\exists x \in E)(\forall y \in F);P(x,y)$ هي العبارة $(\forall x \in E)(\exists y \in F);\overline{P(x,y)}$

أنواع الاستدلال

❖ الاستدلال بالتكافؤات المتتالية

إذا كان $(P \Leftrightarrow Q)$ و $(Q \Leftrightarrow R)$ فإن $(P \Leftrightarrow R)$

❖ الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$$

❖ الاستدلال بفصل الحالات

$$\left[(P \text{ أو } Q) \Rightarrow R\right] \Rightarrow \left[(P \Rightarrow R) \text{ أو } (Q \Rightarrow R)\right]$$

❖ الاستدلال بالخلف

$$\left[\overline{P} \Rightarrow (Q \text{ و } \overline{Q})\right] \Rightarrow P$$

❖ الاستدلال بالترجع

خاصية : لتكن $P(n)$ خاصية مرتبطة بعدد صحيح طبيعي n

إذا كانت الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد صحيح طبيعي معلوم n_0

والعبارة $(P(n) \Rightarrow p(n+1))$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq n_0$

فإن الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0$

مبادئ في المنطق تمارين

التمرين رقم1 :

1) أكتب كلا من العبارتين التاليتين باستعمال الرموز المنطقية وأذكر إذا كانت صحيحة أم خاطئة.

a) (P_1) " لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة $x^2-2=0$ "

b) (P_2) " لكل عددين جذريين x و y يوجد عدد جذري z بحيث: $y<z$ أو $x<z$ "

2) أكتب العبارات التالية باستعمال الرموز المنطقية ثم حدد نفي كل واحدة منها:

(P_1) " مربع أي عدد حقيقي هو أكبر من أو يساوي 1- "

(P_2) " للحدودية x^2-2x-3 على الأقل جذر حقيقي "

(P_3) " يوجد عددحقيقي أصغر قطعامن كل الأعداد الحقيقية"

(P_4) " إذا كان عدد حقيقي أصغر من أو يساوي 1- ، فإن هذا العدد سالب قطعا.

التمرين رقم2 :

أكتب نفي العبارات التالية و أدرس حقيقتها:

$(P_1)\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*:\frac{1}{x}<x$

$(P_2)\ \forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{1+x^2}-|x|\geq 0$

$(P_3)\ \forall x\in[1;+\infty[:(x^2\geq 1$ و $x^2+2x-3\geq 0)$

$(P_4)\ \exists x\in\mathbb{R}^+/(x^2\leq x$ أو $1+\frac{1}{x}<0\ )$

$(P_5)\ \forall x\in\mathbb{Q}:(x^2\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow x\in\mathbb{Z})$

$(P_6)\ (\forall x\in\mathbb{R}).(\exists y\in\mathbb{R}):\left(x^2+y^2+xy-3=0\right)$

$(P_7)\ \left(\exists n\in\mathbb{N}^*\right)/\left(\forall x\in\mathbb{R}\right):\left(\frac{x^{2n}}{1+x}>1\right)$

$(P_8)\ \left(\forall x\in]0,1[\right):\left(\frac{2x}{x^2(1+x^2)}<1\right)$

التمرين رقم4 : الإستدلال الإستنتاجي

1) بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\right):x+\frac{1}{x}\geq 2$

2) بين أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):\left(|x|<1 \text{ و } |y|<1\right)\Rightarrow|x+y|<|1+xy|$

3) بين أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2}\right).\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{*2}\right)\ \left(\frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2\right)\Leftarrow(ax+by=1)$

4) $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right):\ \left.\begin{matrix}|x-y|\leq z\\|x+y|\leq z\end{matrix}\right\}\Rightarrow|xy|\leq\frac{z^2}{2}$

5) $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right)\left.\begin{matrix}|x|<z\\|y|<z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left|\frac{x+y}{2}\right|+\left|\frac{x-y}{2}\right|<\frac{z^2}{2}$

التمرين رقم5 :

بين أن لكل m و n من $\mathbb{N}$:

$(14n+14$ مجموع 3 مربعات كاملة$) \Rightarrow (n+1$ مربع كامل$)$

$(n+1$ مجموع 3 مربعات كاملة$) \Rightarrow (3n+1$ مربع كامل$)$

$(mn+1$ مربع كامل$) \Rightarrow (m$ و n متتابعين في $\mathbb{N})$

التمرين رقم6 : الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس

1) بين أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):(x\neq1$ و $y\neq1)\Rightarrow(x+y-xy\neq1)$

2) بين أنه لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $(xy\neq1$ و $x\neq y) \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq\dfrac{y}{y^2+y+1}$

3) بين أن : $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right):(x+y>2z) \Rightarrow (x>z$ أو $y>z)$

التمرين رقم7 : الإستدلال بالتكافؤات المتتالية

1) بين أن : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right):\left.\begin{matrix}-1<x<+1\\-1<y<+1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow|x+y|<|1+xy|$

2) بين أن : $\left(\forall(x,y,a,b)\in\mathbb{R}^{4}_{*+}\right)\left[x<y\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}<\dfrac{ax+by}{bx+ay}<\dfrac{y}{x}\right]$

3) لكل x و y من $\mathbb{R}^+$: $y<x\Leftrightarrow\sqrt{1+x}-\sqrt{x}<\sqrt{1+y}-\sqrt{y}$

4) لكل x و y من $\mathbb{R}$: $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+y^2}+y\right)=1 \Leftrightarrow x+y=0$

5) لكل θ من $\mathbb{R}$: $$\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta=1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}(\sin\theta=0 \text{ و } \cos\theta=1)\\ \text{أو}\\ \sin\theta=1 \text{ و } \cos\theta=0\end{cases}$$

التمرين رقم8 :

1) بين أن$(a=0$ و $b=0)\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}=0$ $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$

2) حل في $(\mathbb{Q}^*)^2$ المعادلة : $x^2-2y^2=0$

3) نفترض أن $(a;b)\neq(0;0)$

بين أنه: $\exists(x;y)\in\mathbb{Q}^2 / (a+b\sqrt{2})(x+y\sqrt{2})=1$

التمرين رقم9 : الإستدلال بفصل الحالات

مبادئ في المنطق تمارين

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$ و $\frac{n^2+1}{3} \notin \mathbb{N}$

2)بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$. النظمة التالية: $\begin{cases} y^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = x \end{cases}$ لا تقبل حلا في $\mathbb{R}^2$

3) حل في $\mathbb{R}$: $\sqrt{x+7} + \sqrt{2x-3} = 4$ و $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

4) حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية: $\begin{cases} |x+y| - 2|x-y+1| = -6 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

التمرين رقم10 : الإستدلال بالخلف

1) بين أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ و إستنتج أن $\sqrt{3} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) ليكن x و y من $\mathbb{Q}^+$ بحيث $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$. بين أن: $\sqrt{x} + \sqrt{y} \notin \mathbb{Q}$

3) ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ بحيث $[(\forall \varepsilon > 0) : a < \varepsilon]$: بين أن $a = 0$

4)بين أن: $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

5) ليكن n و p من IN^* بحيث $p > 1$. بين أنه إذا كان p يقسم n فإن p لايقسم $n+1$

التمرين رقم11 : الإستدلال بالترجع:

1) بين أن : $(\forall n \in IN^*) 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ حيث $q \neq 1$

2)بين $(\forall n \in IN^*) 1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3)بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $n^3 - n$ يقبل القسمة على3 .

4) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $3^{2n} - 2^n$ يقبل القسمة على 7 .

5)بين أن لكل n من $3^{2n} + 2^{6n-5}$ $\mathbb{N}^*$ يقبل القسمة على11

6)بين أن $(\forall n \in IN)\ (1+q)^n \geq 1 + nq$ حيث $q > 0$

7) بين أن: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

8) بين أن : $7^n > 5^n + 6^n$: $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$:

9) بين أن: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$: $(\forall n \in IN^*)$