السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	مبادئ في المنطق - عموميات حول الدوال حلول مقترحة	فروض النجاح استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1

$$\neg(P_1): \quad \exists x \in IR \ \ \forall y \in IR^+ \quad y^2 < x$$

$$\neg(P_2): \quad x^2 + y = y^2 + x \ \ et \ \ (x \neq y \ \ et \ \ x + y \neq 1)$$

2

لدينا :

$$x^2 + y = y^2 + x \Rightarrow x^2 - y^2 + y - x = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)[(x+y)-1] = 0 \Rightarrow (x - y = 0 \ ou \ x + y - 1 = 0) \Rightarrow (x = y \ ou \ x + y = 1)$$

3

- بالنسبة لـ $n = 0$ المتساوية صحيحة لأن: $1 = (0+1)^2$
- نفترض أن $1+3+5+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$ و نبين أن $1+3+5+\ldots+(2(n+1)+1) = (n+2)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2(n+1)+1) &= 1+3+5+\ldots+(2n+1)+(2(n+1)+1) \\ &= (n+1)^2 + 2n + 2 + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \end{aligned}$$

4

لنبين أن : $\sqrt{4x^2+3} \geq 2x \quad \forall x \in IR$

- إذا كان $x \leq 0$ فإن المتفاوتة صحيحة لأن : $\sqrt{4x^2+3} \geq 0$
- إذا كان $x > 0$

فإن: $\left(\sqrt{4x^2+4}\right)^2 - (2x)^2 = 4x^2 + 3 - 4x^2 = 3 > 0$ ، منه : $\sqrt{4x^2+3} \geq 2x$

لا نقارن المربعات حتى يكون للعددين نفس الإشارة ، و هذا ما استوجب دراسة الحالتين $x \leq 0$ و $x > 0$

تمرين 2 :

نعتبر الدالة : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

1

$$Df = \left\{ x \in IR \ / \ x^2 - x + 1 \neq 0 \right\}$$

محددة الحدودية $x^2 - x + 1$ هي : $\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times1 = 1 - 4 = -3 < 0$ ، إذن للحدودية نفس إشارة $a = 1$

إذن فهي موجبة على IR ، أي أنها تخالف الصفر على IR ، بالتالي $Df = IR$

أن تكون المحددة سالبة لا يعني أن الحدودية سالبة بل مرتبطة بإشارة a ، أما إذا كانت موجبة فإن ذلك سيستوجب دراسة الإشارة من خلال جدول الإشارات.

2

لدينا : $\forall x \in IR \ \ f(x) - f(1) = \dfrac{x}{x^2-x+1} - 1 = \dfrac{x - x^2 + x - 1}{x^2-x+1} = \dfrac{-x^2+2x-1}{x^2-x+1} = \dfrac{-\left(x^2-2x+1\right)}{x^2-x+1} = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2-x+1}$

و بما أن $-(x-1)^2 \leq 0$ و $x^2 - x + 1 > 0$ (حسب السؤال السابق) فإن: $f(x) - f(1) \leq 0 \quad \forall x \in Df$

منه: $f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in Df$ بالتالي الدالة f تقبل قيمة قصوى في النقطة 1

3 أ

$$\forall x \in IR \ \ -f(1-x) + \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{-(1-x)}{(1-x)^2 - (1-x) + 1} + \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{-1+x}{1-2x+x^2-1+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{-1+x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x}{x^2-x+1} = f(x)$$

يجب دائما البدئ بالطرف الذي يمكن إجراء حسابات عليه كالنشر و توحيد المقام...

ب

لدينا حسب السؤال الثاني $f(x)\le 1 \quad \forall x\in IR$ ، إذن : $f(1-x)\le 1 \quad \forall x\in IR$

منه : $-f(1-x)\ge -1 \quad \forall x\in IR$ و بما أن : $\frac{1}{x^2-x+1}>0 \quad \forall x\in IR$

فإن : $-f(1-x)+\frac{1}{x^2-x+1}>-1 \quad \forall x\in IR$ بالتالي : $f(x)>-1 \quad \forall x\in IR$

وجود المكمم الكوني $\forall$ في عبارة يعني إمكانية التعويض بأي قيمة أو تعبير يحقق شرط العبارة، بمعنى أنه لكون $1-x\in IR$ فإننا نستطيع إستبداله بـ x في العبارة الأصلية.

<u>تمرين 3</u> : $f(x)=x^2-x$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، $(\Delta): y=-2x+2$

1

$Dg=\{x\in IR \ / \ x\ge 0\}=[0;+\infty[$

x	$0 \qquad\qquad\qquad\qquad +\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$

2

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

$\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

3

لنحدد نقط تقاطع Cf مع محوري المعلم

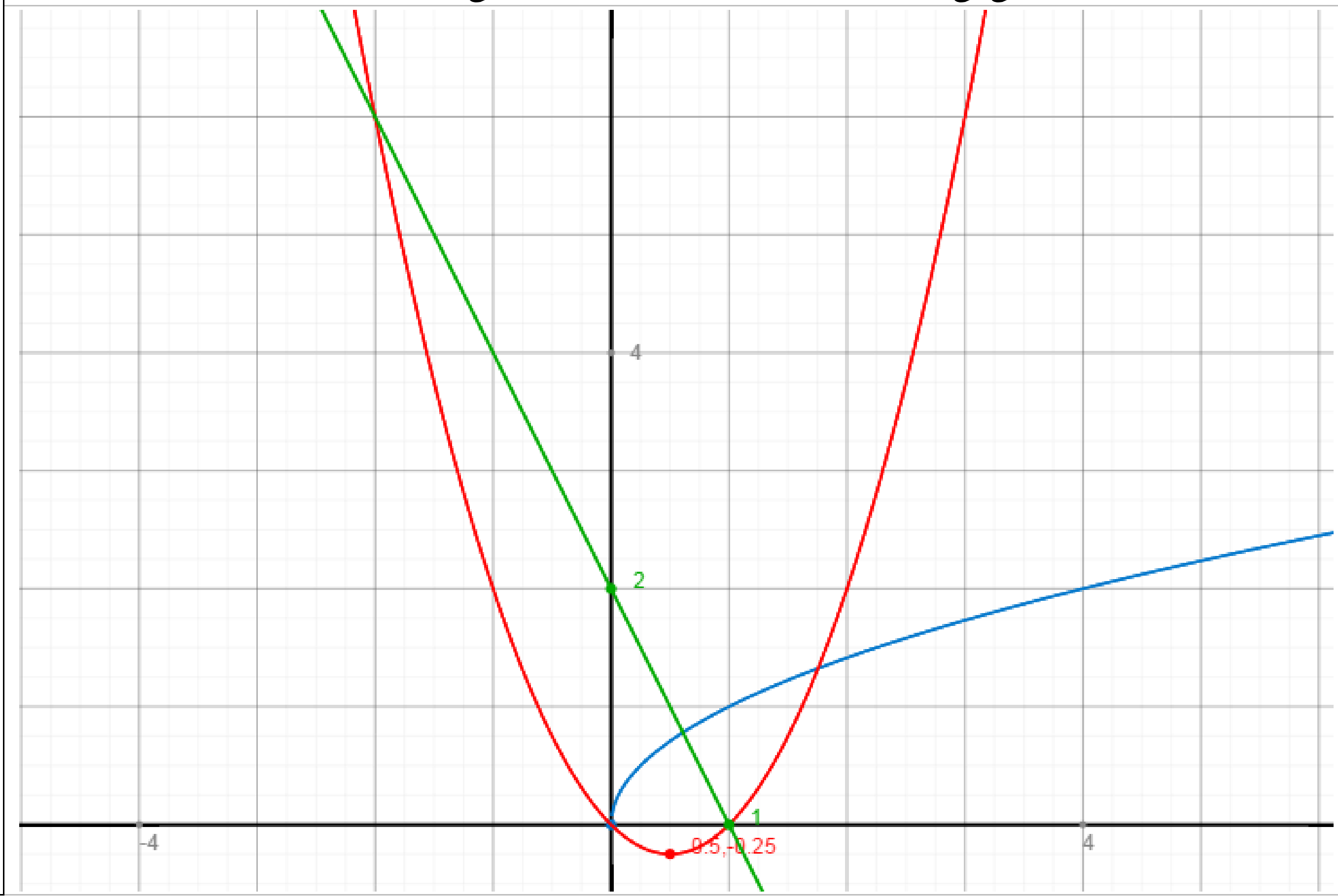
من أجل ذلك نحل المعادلة : $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \ ou \ x=1$

إذن Cf يقطع محور الأفاصيل في النقطتين : $A(0,0)$ و $B(1,0)$

و بما أن $f(0)=0$ فإن Cf يقطع محور الأراتيب في النقطة : $A(0,0)$

دائما لتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ و مع الأراتيب نحسب $f(0)$

4



5		المعادلة : $\sqrt{x}+2x-2=0$ تكافئ $\sqrt{x}=-2x+2$ إذن لمعرفة عدد حلولها مبيانيا نبحث عن عدد نقط تقاطع منحيي الدالة g و (Δ) و نجد أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا (تقاطع اللونين الأزرق و الأخضر)
		طلب منا في هذا السؤال فقط عدد الحلول و ليس تحديد هذه الحلول، في تلك الحالة سيكون علينا البحث عن أفاصيل نقط التقاطع مما سيتطلب أن يكون تمثيلنا المبياني دقيقا.
6		لنحدد جبريا إحداثيات نقط تقاطع Cf و (Δ) لنحل المعادلة : $f(x)=-2x+2 \Leftrightarrow x^2-x=-2x+2 \Leftrightarrow x^2-x+2x-2=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$ $\Delta=1+8=9$ منه : $x_1=\frac{-1+3}{2}=1$ و $x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$ بالتالي Cf و (Δ) يتقاطعان في النقطتين : $E(1;0)$ و $F(-2;6)$
7		حل مبيانيا المتراجحة : $f(x)+2x\geq 2$ المتراجحة تكافئ $f(x)\geq -2x+2$ ، إذن سنبحث عن المجال الذي يكون فيه منحنى الدالة f فوق منحنى المستقيم (Δ)، و نجد : $S=]-\infty;-2]\cup[1;+\infty[$
8		$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right]\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ ، $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ ، $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$
		استعملنا التمثيل المبياني للدالتين g و f لتحديد صور المجالات المطلوبة
9	أ	$h(x)=f\circ g(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=x-\sqrt{x}$ منه : $Dh=[0;+\infty[$
		يجب تحديد مجموعة تعريف المركب قبل التبسيط، بمعنى أننا وجدنا مجموعة التعريف انطلاقا من $(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}$ و ليس من $x-\sqrt{x}$
	ب	نعلم أن g تزايدية على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right]$ و $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right]$ وبما أن f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ فإن h تناقصية على I نعلم g تزايدية على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ و $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ وبما أن f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن h تزايدية على I