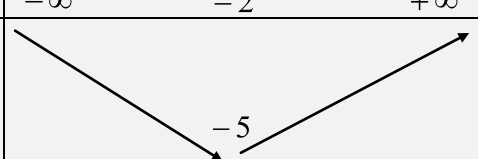
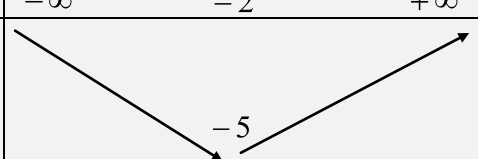
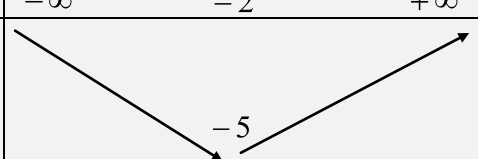
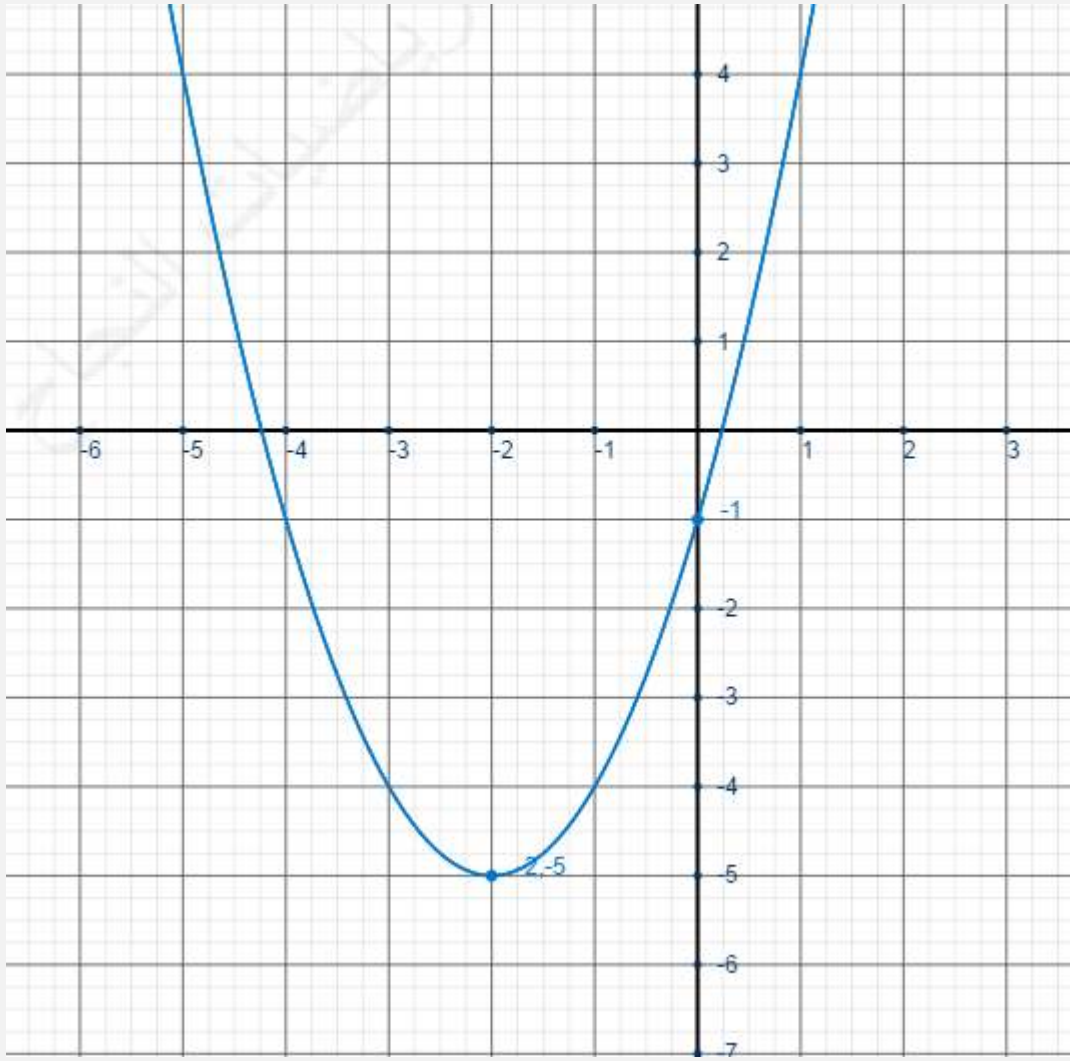


سلسلة 2	عموميات حول الدوال حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية								
تمرين 1: حدد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ في كل حالة مما يلي:										
$g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1$ $= (2x+1)^2 - 1$ $= 4x^2 + 4x + 1 - 1$ $= 4x^2 + 4x$	$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1$ $= 2(x^2 - 1) + 1$ $= 2x^2 - 2 + 1$ $= 2x^2 - 1$	$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ g(x) = x^2 - 1 \end{cases}$								
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{2f(x)}{f(x)-3}$ $= \frac{2 \frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x} - 3} = \frac{2x+2}{x+1-3x}$ $= \frac{2x+2}{x} \times \frac{x}{-2x+1} = \frac{2x+2}{-2x+1}$	$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)}$ $= \frac{\frac{2x}{x-3} + 1}{\frac{2x}{x-3}} = \frac{2x+x-3}{2x}$ $= \frac{3x-3}{x-3} \times \frac{x-3}{2x} = \frac{3x-3}{2x}$	$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x} \\ g(x) = \frac{2x}{x-3} \end{cases}$								
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{(f(x))^2 + 3}{(f(x))^2}$ $= \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 + 3}{(\sqrt{1+x^2})^2}$ $= \frac{1+x^2+3}{1+x^2}$ $= \frac{x^2+4}{x^2+1}$	$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2}$ $= \sqrt{1+\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^2}$ $= \sqrt{\frac{x^4+(x^2+3)^2}{x^4}}$ $= \sqrt{\frac{x^4+x^4+6x^2+9}{x^4}}$ $= \frac{\sqrt{2x^4+6x^2+9}}{x^2}$	$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ g(x) = \frac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$								
$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 1}$ $= \sqrt{1+x^2 - 1} = \sqrt{x^2} = x $	$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2}$ $= \sqrt{1+x^2 - 1} = \sqrt{x^2} = x $	$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x^2} \\ g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$								
<p>🌟 ستلاحظ من خلال الأمثلة المقدمة أنه عموما يكون $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$، لكن يمكن أن نحصل على التساوي في بعض الحالات.</p>										
تمرين 2:										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">f(x)</td> <td colspan="3" style="text-align: center;">  </td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-2	$+\infty$	f(x)				<p>f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن تمثيلها البياني عبارة عن شلجم رأسه:</p> $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$ <p>إذن:</p>	$f(x) = x^2 + 4x - 1$
x	$-\infty$	-2	$+\infty$							
f(x)										



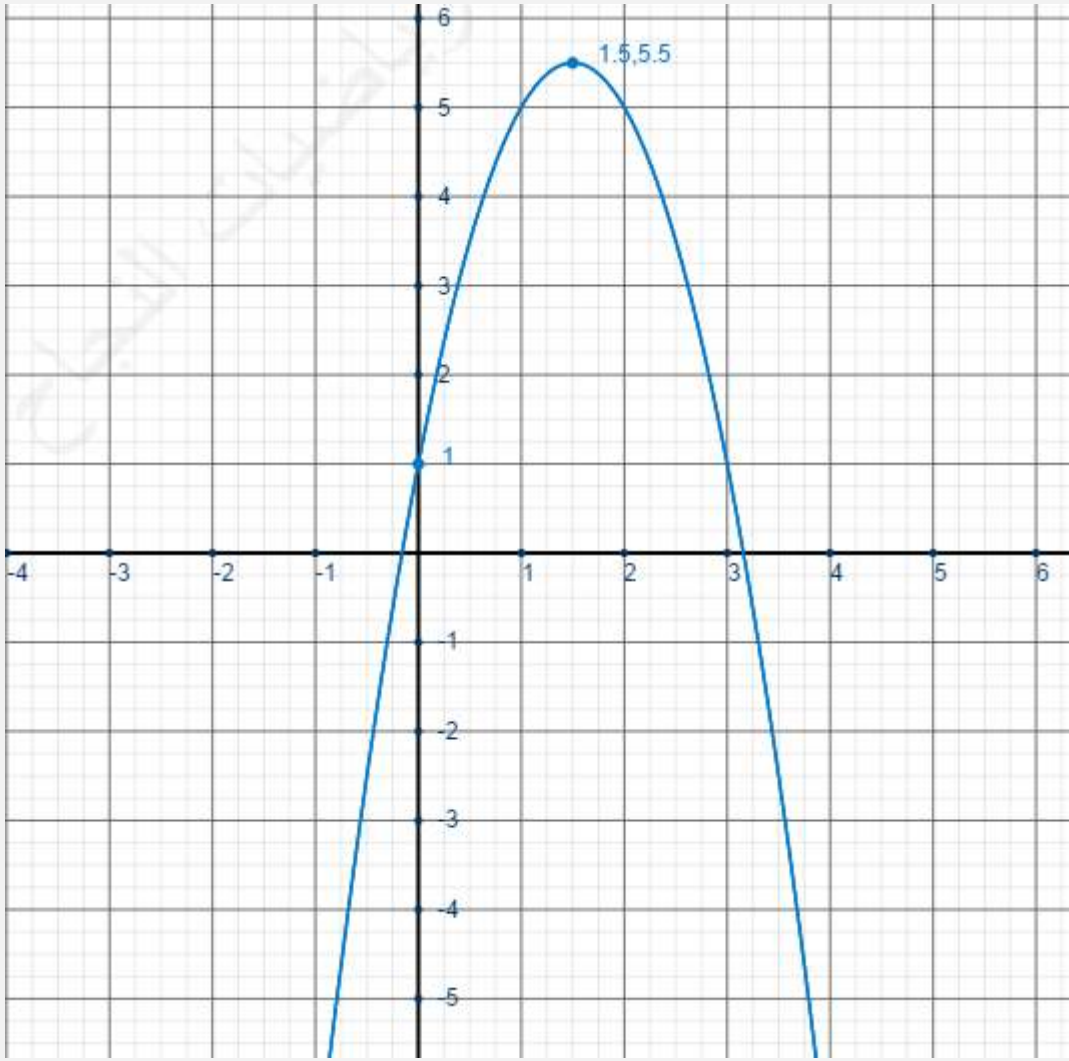
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow \frac{11}{2} \searrow$		

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

إذن :

$$g(x) = -2x^2 + 6x + 1$$



لاحظ أن رقابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

h عبارة عن دالة على شكل

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن $\frac{ax+b}{cx+d}$ هذلول:

$$h(x) - 3 = \frac{3x-1}{x-2} - 3$$

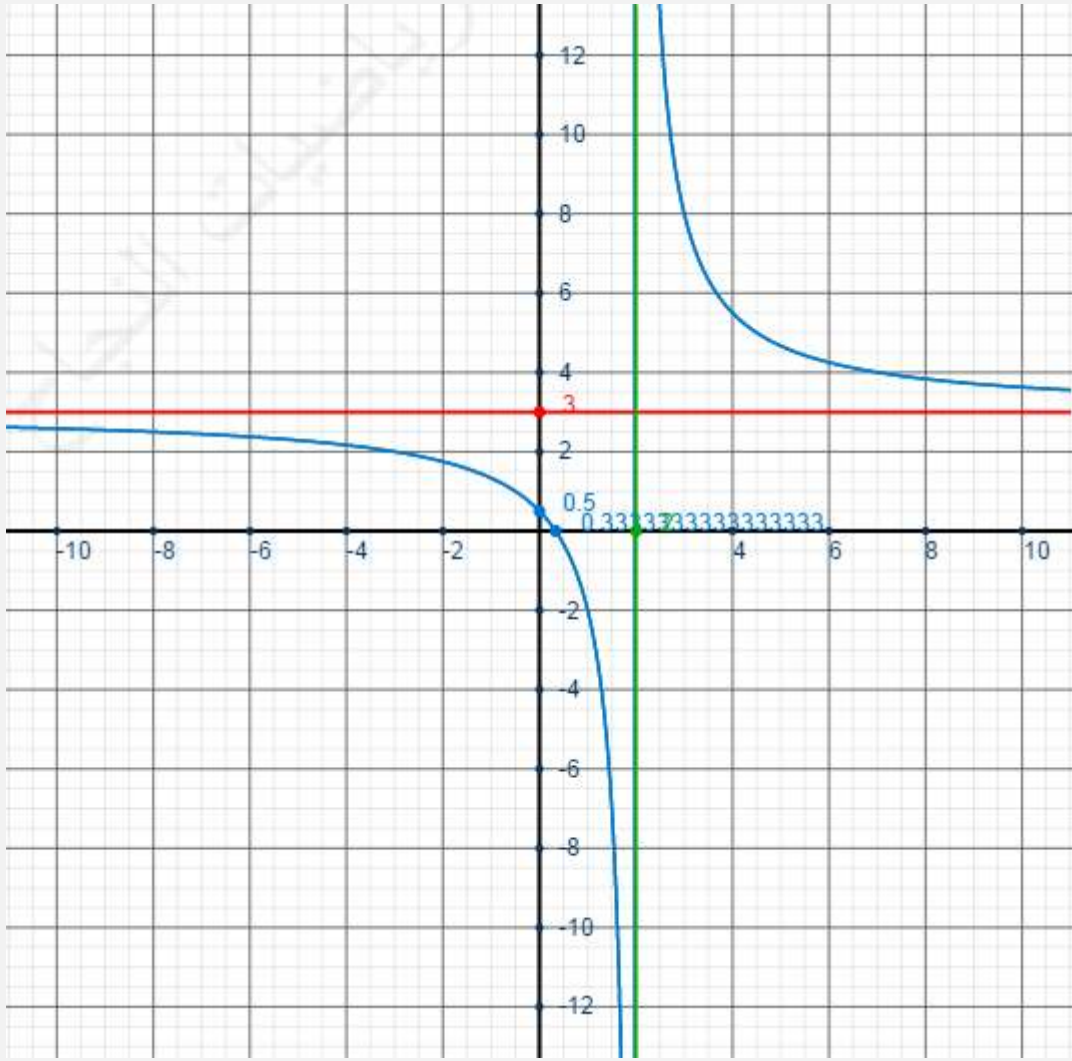
$$h(x) - 3 = \frac{3x-1-3x+6}{x-2} \quad \text{ولدينا:}$$

$$h(x) - 3 = \frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه: $\Omega(2,3)$ وبما أن $5 > 0$ فالدالة تناقصية

$$h(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
$h(x)$	↘		↘	



x	$-\infty$	-2	$+\infty$	
$k(x)$	↗		↗	

k عبارة عن دالة على شكل
إذن تمثيلها المبياني عبارة
عن هذلول:

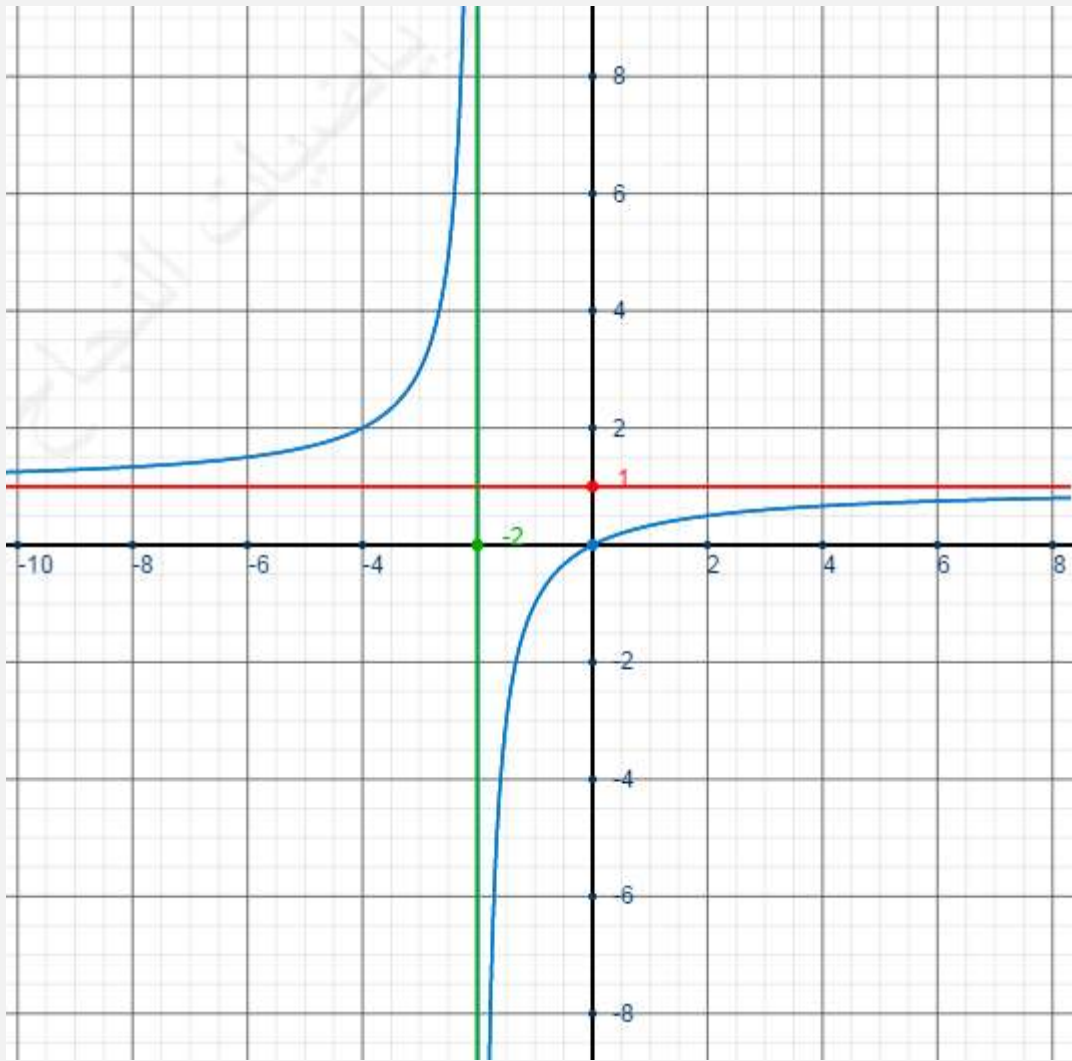
$$k(x) - 1 = \frac{x}{x+2} - 1$$

$$k(x) - 1 = \frac{x - x - 2}{x+2} \quad \text{ولدينا:}$$

$$k(x) - 1 = \frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه: $\Omega(-2, 1)$ وبما
أن $-2 < 0$ فالدالة تزايدية

$$k(x) = \frac{x}{x+2}$$



لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$		0	↗

p عبارة عن دالة على شكل
إذن: $\sqrt{x+a}$

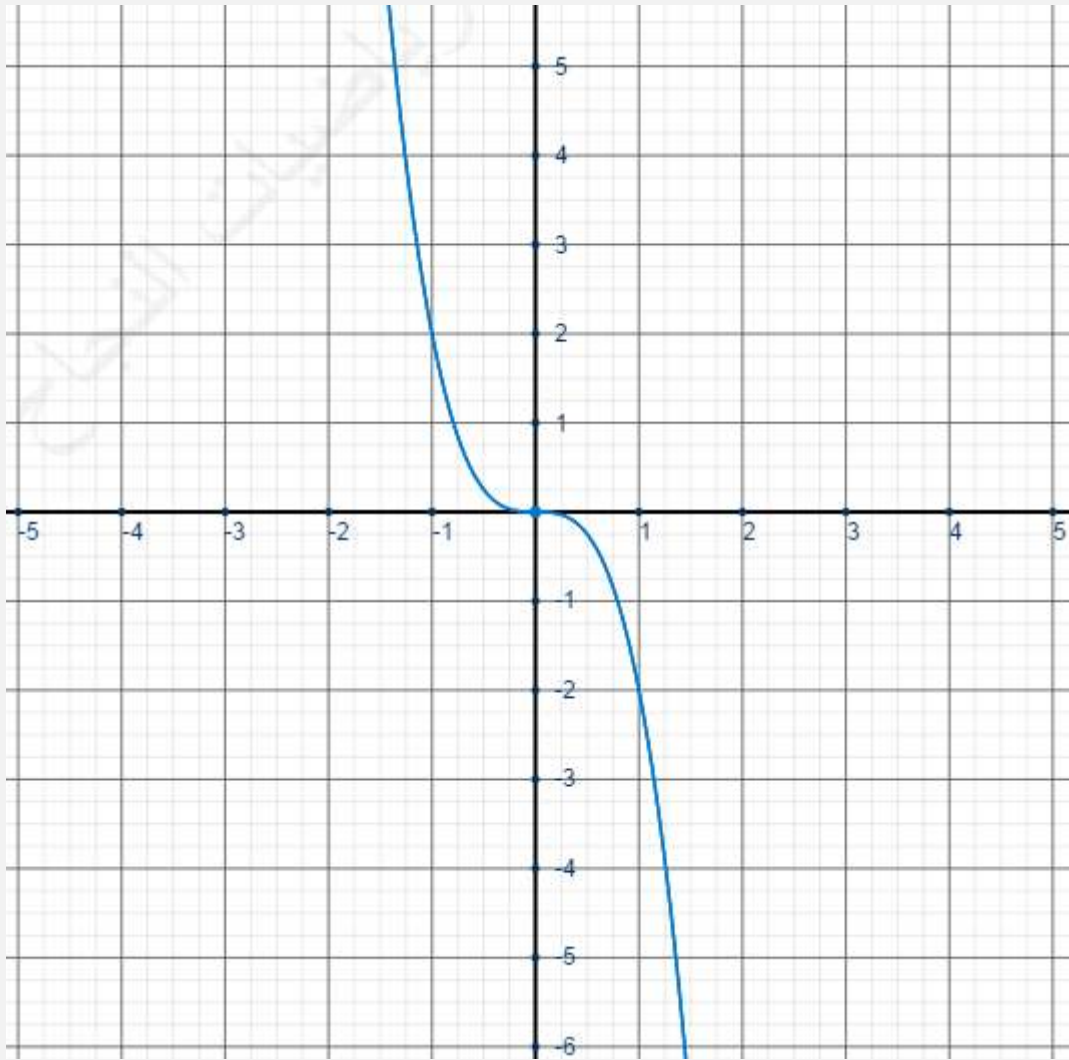
$$p(x) = \sqrt{x-2}$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

q عبارة عن دالة على شكل ax^3 و بما أن $a = -2 < 0$ ، فإن :

$$q(x) = -2x^3$$



تمرين 3 : أوجد $f(x) = x^2 + 4x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ و $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x + 5 \geq 0\}$	$Df = \mathbb{R}$	1
$Dh = \mathbb{R}$: منه ، $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$	$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x + 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\} = [-4; +\infty[$	

لنبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq -3$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - (-3) = x^2 + 4x + 1 + 3 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$

بالتالي : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq -3$

لنبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geq 1$

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h^2(x) - 1^2 = x^2 + 4x + 5 - 1 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h^2(x) \geq 1$ و بما أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geq 0$: فإن $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \geq 1$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$			

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

إذن : $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$

4

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g(x)$			$0 \rightarrow$

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$ ، إذن :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+4} = \sqrt{x^2 + 4x + 1 + 4} = \sqrt{x^2 + 4x + 5} = h(x)$ 5

رتابة الدالة h على $]-\infty; -2]$ رتابة الدالة h على $[-2; +\infty[$

6

- لدينا f تناقصية على $]-\infty; -2]$
- لدينا f تزايدية على $[-2; +\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3; +\infty[$
- لدينا g تناقصية على $]-\infty; -2]$
- لدينا h تناقصية على $]-\infty; -2]$
- لدينا h تزايدية على $[-2; +\infty[$

لتحديد رتابة المركب $p \circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على I (2) نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ (3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J وفي الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقاً من نتائج المرحلتين الأولى والثالثة مثل قاعدة إشارة جذاء

تمرين 4: نضع : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$

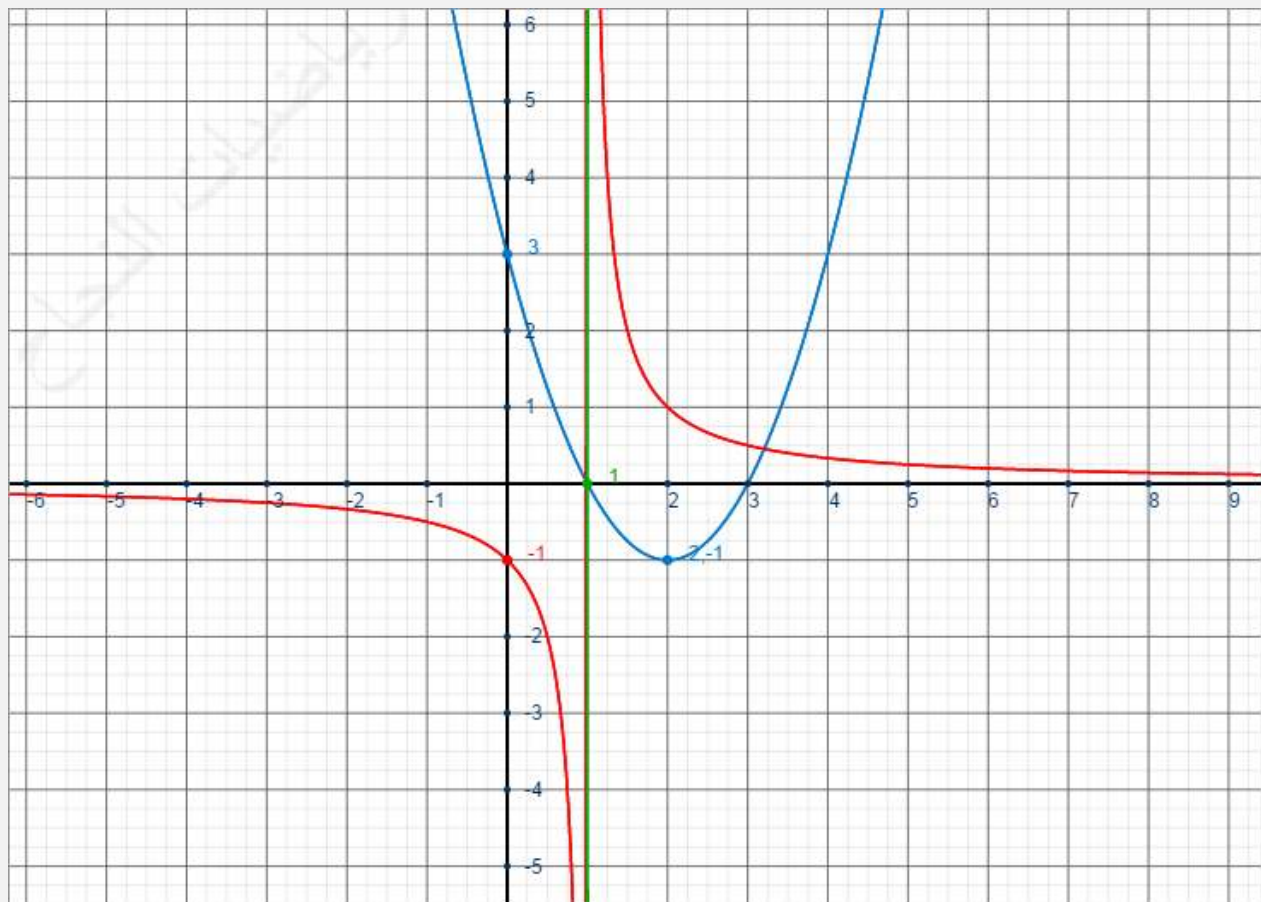
أ) دالة حدودية من الدرجة الثانية إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

لنحدد نقطتي تقاطع C_f ومحور الأفاصيل، أي لنحل المعادلة: $f(x) = 0$ أي $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب) لدينا $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ منه : $x = \frac{4-2}{2} = 1$ ou $x = \frac{4+2}{2} = 3$

بالتالي: C_f يتقاطع مع محور الأفاصيل في النقطتين: $A(1;0)$ و $B(3;0)$

C_f شلجم رأسه $E(1, f(1))$ منه :



1

ج

2 C_g عبارة عن هذلول مركزه $F(1,0)$ ومقارياه هما المستقيمان : $(D_1): x=1$ و $(D_2): y=0$ (انظر الشكل السابق)

$$(E): x^3 - 5x^2 + 7x - 4 = 0$$

بما أن العدد 1 ليس حلا للمعادلة (E) ($1 - 5 + 7 - 4 = -1 \neq 0$)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x - x^2 + 4x - 3 - 1 = 0$$

أ) 3 فإن : لكل $x \neq 1$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 4 = 0$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (E)$$

و هذا يبرهن عن التكافؤ المطلوب

ب) بما أن Cf و Cg يتقاطعان في نقطة وحيدة، فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا

في السؤال الأخير غير مطلوب تحديد الحل أو الحلول، فقط عدد الحلول إن وجدت.

$$\text{تمرين 5: } f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = \sqrt{|x|}, \quad (\Delta): y = -2x + 2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f(x)			

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية،
إذن تمثيلها المياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)			

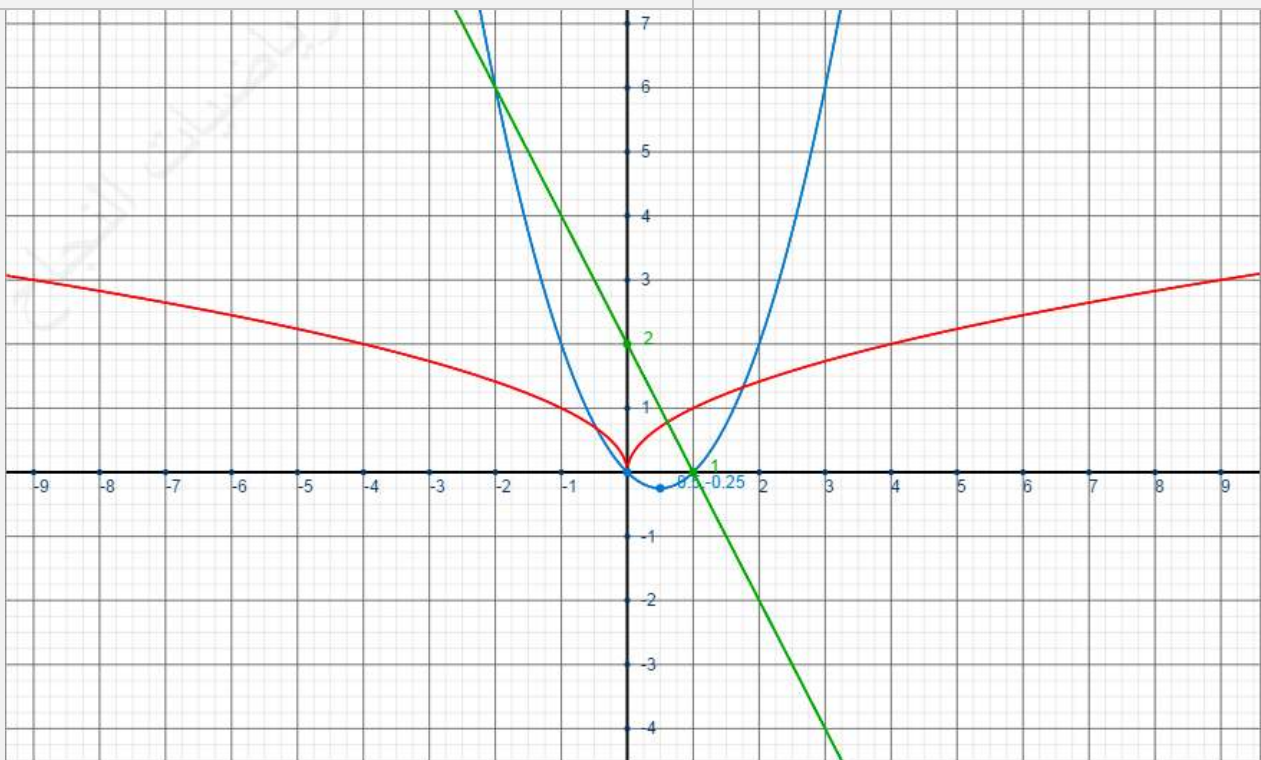
1 لدينا : $Dg = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 0\} = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = g(x) \text{ و}$$

إذن : g دالة زوجية

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) = \sqrt{x} \text{ : من جهة أخرى :}$$

إذن جدول تغيراتها هو :



2

$$\text{المعادلة } \sqrt{|x|} + 2x = 2 \text{ تكافئ } g(x) = -2x + 2$$

3 ميانيا نجد أن Cg و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.

	<p>لنحدد جبريا إحداثي نقتطع (C_f) و (Δ) من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x) = -2x + 2$ أي $x^2 - x = -2x + 2$ أي $x^2 - x + 2x - 2 = 0$ أي $x^2 + x - 2 = 0$، لدينا $\Delta = 1 + 8 = 9$ منه: $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ أو $x = \frac{-1-3}{2} = -2$ إذن (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1, f(1))$ و $F(-2, f(-2))$ أي: $E(1, 0)$ و $F(-2, 6)$</p>	4		
	<p>مبيانيا نجد أن: ▪ حل المتراجحة $g(x) \leq 3$ هو: $S = [-9; 9]$ ▪ حل المتراجحة $g(x) \geq 2$ هو: $S =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$ ▪ حل المتراجحة $-2x + 2 < f(x) < 2$ هو: $S = (]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[) \cap [-1, 2] = [1; 2]$</p>	5		
	<p>$g\left(\left[\frac{1}{4}; +\infty\right]\right) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و $g\left(\left[0; \frac{1}{4}\right]\right) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$</p>	6		
	<p>$f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[$ و $f([2; +\infty[) = [2; +\infty[$ و $f([-2; 1]) = \left[-\frac{1}{4}; 6\right]$</p>			
	<p>لدينا: $Dh = \mathbb{R}^+$ و $\forall x \in \mathbb{R}^+ h(x) = x - \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} = f(\sqrt{x}) = f(g(x)) = f \circ g(x)$</p>			
	<table border="0"> <tr> <td data-bbox="111 862 845 952"> <p>رتابة الدالة h على $J = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على J ▪ $g(J) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$</p> </td> <td data-bbox="845 862 1549 952"> <p>رتابة الدالة h على $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على I ▪ $g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ و f تناقصية على $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ إذن h تناقصية على $\left[0; \frac{1}{4}\right]$</p> </td> </tr> </table>	<p>رتابة الدالة h على $J = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على J ▪ $g(J) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$</p>	<p>رتابة الدالة h على $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على I ▪ $g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ و f تناقصية على $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ إذن h تناقصية على $\left[0; \frac{1}{4}\right]$</p>	7
<p>رتابة الدالة h على $J = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على J ▪ $g(J) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right]$</p>	<p>رتابة الدالة h على $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على I ▪ $g(I) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$ و f تناقصية على $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ إذن h تناقصية على $\left[0; \frac{1}{4}\right]$</p>			
<p>صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $[0; +\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين</p>				