

دراسة الدوال

4) اشتقاق دالة على مجال - الدالة المشتقة

(a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I

(b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .

(c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة $f'(x): x \rightarrow f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة

(d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .

e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية .

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad (10) \quad (a)' = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \quad (11) \quad (x)' = 1 \quad (2)$$

$$(ax)' = a \quad (3)$$

$$(f(ax+b))' = af'(ax+b) \quad (12)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (13) \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (5)$$

$$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b) \quad (14)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (15) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (6)$$

$$(f+g)' = f'+g' \quad (7)$$

$$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b) \quad (16)$$

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \quad (17) \quad (fg)' = f'g + g'f \quad (8)$$

$$(f^n)' = nf'f^{n-1} \quad (18) \quad (af)' = af' \quad (9)$$

$$(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b)) \quad (19)$$

ملاحظة (a) لتكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\quad}$.

لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل تغير صيغتها في x_0 أم لا ؟

(* إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض $x \rightarrow x_0$

(* إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .

(b) إذا كانت f' تتعدم في x_0 ($f'(x_0) = 0$) فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصيل .

5) تغيرات دالة

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

(a) تكون f تزايدية على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$

(b) تكون f تزايدية قطعاً على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .

(c) تكون f تناقصية على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$

(d) تكون f تناقصية قطعاً على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .

I) الإشتقاق

1) تعاريف

(a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0) = l$.

(b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا فقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR \quad \text{ونكتب } f'_d(x_0) = l$$

(c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا فقط إذا كان :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR \quad \text{ونكتب } f'_g(x_0) = l$$

(d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا فقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0

و على يسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

(e) (*) (f متصلة في x_0) \Rightarrow (f قابلة للإشتقاق في x_0)

(*) (f غير قابلة للإشتقاق في x_0) \Rightarrow (f غير متصلة في x_0)

2) التاويل الهندسي :

(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند

النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'(x_0)$ معادلته

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (T) \quad \text{وسيكون } C_f \text{ على أحد الأشكال التالية :}$$

(b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس

عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته

$$y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (T_1) \quad \text{وسيكون } C_f \text{ على أحد الشكلين التاليين :}$$

(c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .

ملاحظة (*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على بين x_0 وعلى يسار x_0

و $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا

يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين وسيكون C_f على أحد الأشكال :

(*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لاينكسر" في M وإذا

كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .

3) الدالة التآلفية المماسية لدالة .

(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة

$$u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{تسمى الدالة التآلفية المماسية للدالة } f \text{ في } x_0$$

(b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة لـ $f(a)$

$$(f(a) = u(a))$$

<p>C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$.</p>
<p>(4) محور تماثل - مركز تماثل</p> <p>(a) يكون المستقيم $x = a$: (Δ) محور تماثل C_f إذا فقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x)$</p> <p>(b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل C_f إذا فقط إذا كان : (*) لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$ (*) $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x)$</p>
<p>(III) الدوال الدورية</p>
<p>(1) تعريف</p> <p>(a) نقول إن الدالة f دورية إذا فقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T بحيث $(\forall x \in D_f) : f(x + T) = f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط يسمى دور f</p> <p>(b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f ($k \in \mathbb{Z}$) (c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعاً .</p> <p>ملاحظة (a) لكي نبين أن f دورية يجب أولاً ملاحظة الدور ثم نتحقق منه</p> <p>(b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ (*) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ (*) $\sin(x + k\pi) = \sin x$ (*) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (*) $\tan(x + k\pi) = \tan x$ (*)</p>
<p>(2) ادوار بعض الدوال الاعتيادية .</p> <p>(a) $f(x) = \sin(ax + b)$ أو $f(x) = \cos(ax + b)$ $T = \frac{2\pi}{ a }$</p> <p>(b) $f(x) = \sin^2(ax + b)$ أو $f(x) = \cos^2(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$</p> <p>(c) $f(x) = \tan(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{ a }$</p> <p>(d) لكي نحدد دور $f + g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .</p>
<p>(3) رتبة دالة دورية .</p> <p>لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتيبة على $[a, b]$ فإن f رتيبة على $[a + T, b + T]$ ولها نفس الرتبة .</p>
<p>(4) منحني دالة دورية</p> <p>(a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T (عادت نأخذ $[0, T] \cap D_f$) ثم إزاحتها بإزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$ ومن أجل إزاحة هذا الجزء نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزيحها بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بالرتوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار .</p> <p>(b) إذا كانت f دالة دورية دورها T وزوجية (أو فردية) فيكفي إنشاء C_f على $[0, \frac{T}{2}] \cap D_f$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأرتيب (أو أصل المعلم) ثم الإزاحة .</p>

<p>(6) مطارف دالة .</p> <p>لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرفاً نسبياً في x_0 إذا فقط إذا كانت f' تتقدم وتغير الإشارة في x_0</p>
<p>(II) التمثيل المبياني لدالة</p>
<p>(1) التقعر</p> <p>لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .</p> <p>(a) يكون C_f محدباً () إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$</p> <p>(b) يكون C_f مقعراً () إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$</p>
<p>(2) نقط انعطاف</p> <p>(a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في $M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذا كان C_f يغير التقعر في M (C_f يخترق (T)) :</p> <p>(b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا فقط إذا كان f'' تتقدم وتغير لإشارة في x_0 .</p> <p>ملاحظة إذا كانت f' تتقدم ولاتغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازياً لمحور الأفاصيل .</p> <p>(b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .</p>
<p>(3) الفروع اللانهائية .</p>
<p>(a) تعريف</p> <p>نقول إن C_f يقبل فرعاً لانهاية إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية :</p> <p>$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.</p> <p>(b) تصنيف الفروع اللانهائية :</p> <p>(1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ فإن المستقيم $x = a$: (Δ) مقارب لـ C_f بجوار a .</p> <p>(2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ فإن المستقيم $y = a$: (Δ) مقارب لـ C_f بجوار ∞ .</p> <p>(3) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$:</p> <p>(a) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأرتيب بجوار ∞ .</p> <p>(b) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .</p> <p>(c) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$:</p> <p>(i) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ فإن المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارب لـ C_f بجوار ∞ .</p> <p>(ii) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ فإن C_f يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ .</p> <p>ملاحظة يكون المستقيم $y = ax + b$: (Δ) مقارباً لـ C_f بجوار ∞ إذا فقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $y = ax + b$: (Δ) مقارباً لـ</p>