

<p>المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثمانى نجيب مذكرة رقم 11</p>	<p>مادة الرياضيات</p>	<p>أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة</p>
---	-----------------------	--

مذكرة رقم 11 في درس دراسة الدوال

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- ينبغي الاقتصار على تحديد نهايات دوال بسيطة (دوال حدودية من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة أو دوال من الشكل $x \rightarrow ax+b+\varphi(x)$ حيث $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$) عند محداث مجموعات تعريفها وتحديد فروعها اللانهائية؛ - ينبغي دراسة دوال لا يطرح حساب وإشارة مشتقاتها صعوبة بالغة؛ - ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات و متراجحات من النوع $f(x) \leq c$ و $f(x) = c$ و $f(x) < g(x)$ و $f(x) = g(x)$ و $f(x) \leq g(x)$ حيث f و g دالتان من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.</p>	<p>- حل مبياني لمعادلات و متراجحات؛ - استعمال الدورية و عناصر تماثل منحني في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ - استعمال إشارة المشتقة الثانية لدراسة تقعر منحني وتحديد نقط انعطافه؛ - دراسة و تمثيل دوال حدودية و دوال جذرية و دوال لاجذرية؛ - دراسة و تمثيل دوال مثلثية بسيطة.</p>	<p>- الفروع اللانهائية: المستقيمات المقاربة؛ الاتجاهات المقاربة؛ - نقط الانعطاف؛ تقعر منحني دالة؛ - عناصر تماثل منحني دالة.</p>

والمقارب الموازي لمحور الأفصائل

تعريف: إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y = a$ مقارب للمنحني (C_f)

بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f

للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وأول النتيجةتين هندسيا

الجواب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$

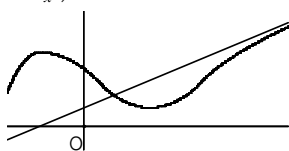
التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحني (C_f)

المقارب المائل

لنكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و تقبل نهاية غير منتهية

بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا كانت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$)



حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة

$y = ax + b$ مقارب مائل

للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

(أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

كالتالي: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحني الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$ ومنه $D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

2) $f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x-3}$ يعني $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$

I. المستقيمات المقاربة

في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. فرع لا نهائي لمنحني دالة عددية

تعريف: لنكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x

و (C_f) منحناها في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا آلت إحدى إحداثيي نقطة من (C_f) إلى ما

لا نهاية , نقول إن (C_f) يقبل فرعا لا نهائيا.

2. المقارب الموازي لمحور الأرتيب

تعريف: إذا كانت:

أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x = a$ مقارب

للمنحني (C_f)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$

حدد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ وأول النتيجةتين هندسيا

الجواب: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3$

ومنه: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

التأويل المبياني: المستقيم ذا المعادلة $x = 2$ مقارب للمنحني (C_f)

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة

$$y = -x \Leftrightarrow y = (-1)x$$

III. تقعر منحنى - نقط الانعطاف

خاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f)

منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا

موجها نحو محور الأرتيب الموجبة.

إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا

موجها نحو محور الأرتيب السالبة.

إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0 \in I$ وتتغير إشارتها

بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من \mathbb{R}

2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f

مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	0

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال:

$$]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$$

• تقعر (C_f) موجه نحو محور الأرتيب الموجبة على المجال: $[-2; 2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1, f(1))$ و $B(-1, f(-1))$ نقطتي انعطافه

IV. محور تماثل - مركز تماثل

خاصية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة

على مجموعة D و (C_f) منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = a$

$(a \in \mathbb{R})$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا

و فقط إذا كان : $(\forall x \in D); (2a-x) \in D$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in D); f(2a-x) = f(x) \end{array} \right.$$

تكون النقطة $\Omega(a; b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f)

إذا و فقط إذا كان : $(\forall x \in D); (2a-x) \in D$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in D); f(2a-x) = 2b - f(x) \end{array} \right.$$

مثال 1 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \sqrt{x-x^2}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة

يعني $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ومنه المستقيم ذا

المعادلة $y = 2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

خاصية: يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax+b$ ($a \neq 0$) مقاربا مائلا

للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا و فقط إذا كان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

II. الفروع الشلجية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث تقبل نهاية لا منتهية بجوار

$+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1. فرع شلجي اتجاهه محور الأفصيل

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$) نقول إن المنحنى

(C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور

الأفصيل بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x) = \sqrt{x}$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور

الأفصيل بجوار $+\infty$

2. فرع شلجي اتجاهه محور الأرتيب

تعريف: إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ أو

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x) = x^3$ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور

الأرتيب بجوار $+\infty$

3. فرع شلجي اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = ax$ حيث $a \neq 0$

تعريف: إذا كانت : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة

$y = ax$ بجوار $+\infty$ (نفس التعريف بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x-x}$$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1) $D_f = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = -1 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

10. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ لأنها دالة حدودية

(أ) إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

(ب) $f(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 - 4(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x = -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = -f(x)$

ومنه دالة فردية

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهاية هي نهاية حدها الأكبر درجة

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^2 = +\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجيا اتجاهه محور الأرتيب بجوار $-\infty$

(5) $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4 = x^2 - 4$

$(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$

$x = -2$ أو $x = 2 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4		$+$	$-$	$+$

(6)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow 16/3$	$\searrow -16/3$	$\nearrow +\infty$

(7) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ و $f(-1) = \frac{11}{3}$ و $f'(-1) = -3$

$y = -3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{11}{3} - 3(x+1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x+1)$

(8) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

نحل فقط المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0$ يعني $x = 0$ أو $\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0$

يعني $x = 0$ أو $x^2 = 12$ يعني $x = \sqrt{12}$ أو $x = -\sqrt{12}$

يعني $x = 0$ أو $x = 2\sqrt{3}$ أو $x = -2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(2\sqrt{3}; 0)$ و $B(-2\sqrt{3}; 0)$ و $O(0; 0)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط: $f(0) = 0$ لدينا $f(0) = 0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0; 0)$

(9) $f(2) = -\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2) = \frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

(9) التمثيل المبياني للدالة f

2. بين أن المستقيم $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحني (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

(1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$ $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$x = 1$ أو $x = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$

ومنه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-x^2$		$-$	$+$	$-$

ومنه: $D_f = [0, 1]$

(2) $x = a$ يعني $x = \frac{1}{2}$

(أ) نبين أنه: إذا كانت $x \in [0, 1]$ فإن $1 - x \in [0, 1]$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1 + 0 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

$1 - x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow$

(ب) نبين أن: $f(1 - x) = f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1 - x) = \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)}$

$= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x)$

ومنه $x = \frac{1}{2}$ محور تماثل منحني الدالة f .

مثال 2 نعتبر الدالة العديدة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$

1. بين أن $\forall x \in D_f$ $f(x) = x - 2 + \frac{2}{x + 1}$

2. بين أن النقطة $\Omega(-1; -3)$ مركز تماثل منحني الدالة f .

الجواب: (1) $x - 2 + \frac{2}{x + 1} = \frac{(x - 2)(x + 1) + 2}{x + 1} = \frac{x^2 - x}{x + 1} = f(x)$

(2) $\Omega(a; b)$ $\Omega(-1; -3)$

(أ) نبين أنه: إذا كانت $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow$

(ب) نبين أن: $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$ ؟؟؟؟

$f(-4 - x) + f(x) = -4 - x - 1 + \frac{1}{-4 - x + 2} + x - 1 + \frac{1}{x + 2}$

$= -4 - 2 + \frac{1}{-x - 2} + \frac{1}{x + 2} = -6 + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = -6$

ومنه $\Omega(-2; -3)$ مركز تماثل منحني الدالة f .

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. أدرس زوجية الدالة f

3. أحسب نهايات الدالة f عند محداث D_f

4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحني الدالة f

5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

6. حدد جدول تغيرات الدالة f

7. حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في

النقطة A التي أفصولها $x_0 = -1$

8. حدد نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.

9. حدد مطايرف الدالة f إذا وجدت

يعني المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي للمنحنى.

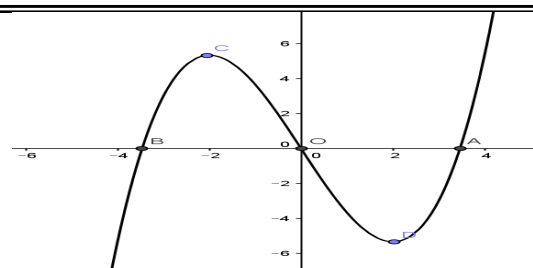
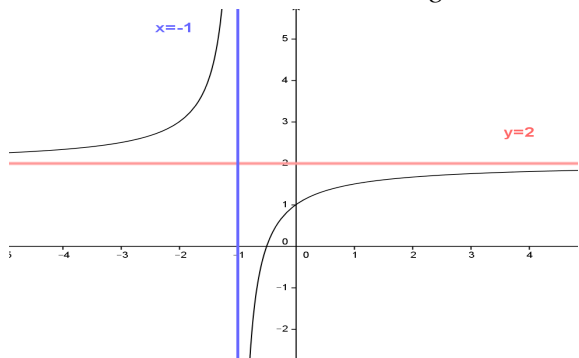
$$g'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

للكل x من D لدينا: $(\forall x \in D) g'(x) > 0$ يعني:

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$			

منحنى الدالة g .



تمارين 2: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$

- حدد حيز تعريف الدالة g .
- أحسب نهايات الدالة g في محددات حيز التعريف و أول النتائج هندسياً.
- أحسب الدالة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
- أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

(1) حيز تعريف الدالة g هو:

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ومنه $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$$

تمارين 3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$

2. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. بين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$ و أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 2x$

4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \text{ ومنه جدول الاشارة:}$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2+2x-2$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{ومنه: } D_f =]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$f'(x) = (\sqrt{4x^2 + 2x - 2})' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right)}}{x} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا: $x \rightarrow -\infty$ ومنه: $|x| = -x$ ومنه

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{-x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{-x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{-x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = b$$

(4) ومنه: $y = ax + b$ أي $y = 2x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f

بجوار $-\infty$