أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:دراسة الدوال وتمثيلها

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$

حدد $\lim_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

$\lim_{x\to2^+}2x-1=3$ و $\lim_{x\to2^+}3x-6=0^+$ و $\lim_{x\to2^-}3x-6=0^-$

ومنه : $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين2: نعتبر الدالة العددية f

للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين3: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

(1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq0\}$

ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

(2 $f(x)=2x-1+\frac{1}{x-3}$ يعني $f(x)-(2x-1)=\frac{1}{x-3}$

يعني $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم

ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

تمرين4: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}$

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty}=0$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

تمرين5: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

تمرين6: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$
2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1 $D_f=\mathbb{R}^+$

(2 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=-\infty$

(3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1}{+\infty}-1=-1=a$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to+\infty}f(x)-(-1)x=\lim_{x\to+\infty}f(x)+x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=(-1)x\Leftrightarrow y=-x$ بجوار $+\infty$

تمرين7: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$$

(2 $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$ -2 2 $+\infty$
$x2-4$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

- تقعر (C_f) موجه نحو محورالأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$ نقطتي انعطافه

تمرين8: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f
2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

1) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R} / x-x^2\geq 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$x-x2$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

ومنه: $D_f=[0,1]$

2) $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow 1-1\leq 1-x\leq 1+0 \Leftrightarrow -1\leq -x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow x\in[0,1]$

$1-x\in[0,1] \Leftrightarrow 0\leq 1-x\leq 1 \Leftrightarrow$

ب) نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

تمرين9: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$

1. بين أن $\forall\in D_f$ $f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

الجواب : 1) $x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$

2) $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$\Leftrightarrow -2-x\neq -2+1 \Leftrightarrow -x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq -1 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

$-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\} \Leftrightarrow -2-x\neq -1 \Leftrightarrow$

ب) نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=x^2+4x+3$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=-1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

9) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D).

10) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq 0$.

الأجوبة: $f(x)=x^2+4x+3$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+4x+3)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$2x+4$	$-$ 0 $+$

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه f تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=-1$

$y=2x+2 \Leftrightarrow y=2(x+1) \Leftrightarrow y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$

لأن: $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

6) أ) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

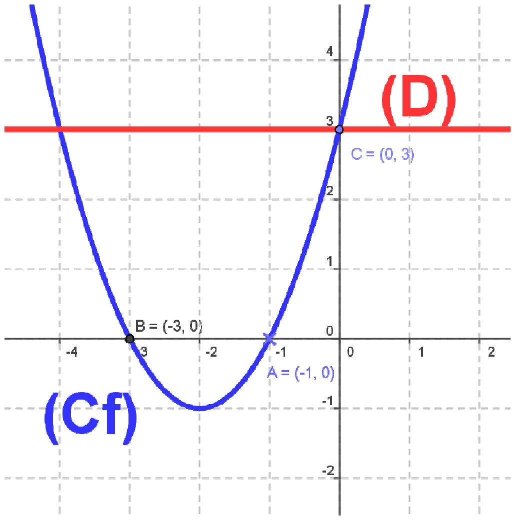
7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : -1

8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

و المستقيم $(D): y=3$

الأستاذ : عثماني نجيب

x	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	3	0	-1	0	3	8



9) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D).

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم : $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

10) $x^2+4x\geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+3\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\geq y \Leftrightarrow$ منحنى الدالة (C_f)

يوجد فوق المستقيم (D) ومنه : $S=[-4;0]$

تمرين11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow f'(x)=0$

$x=-2$ أو $x=2\Leftrightarrow$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(6

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$16/3$	↘	$-16/3$	↗	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=-3x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1)\Leftrightarrow y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$

8) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

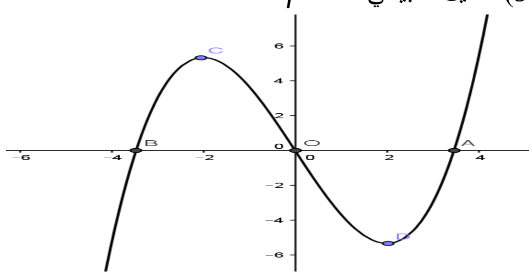
ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

9)التمثيل المبياني للدالة f



تمرين12: نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
4. أنشئ منحنى الدالة g .

الحل: 1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$ و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$

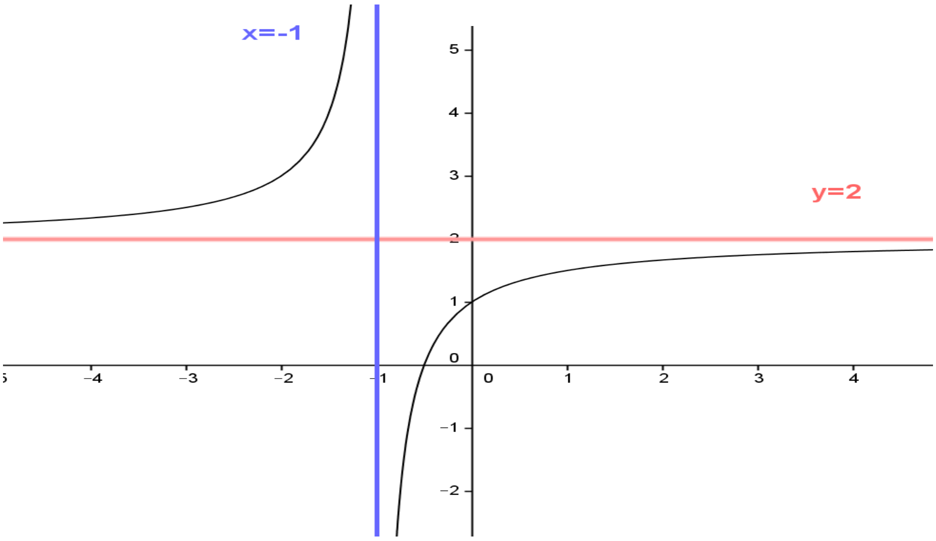
يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$ يعني: $(\forall x\in D)\ g'(x)>0$

جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
$g(x)$	$2 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 2$

منحنى الدالة g .



تمرين13 : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
و $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$
3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.
7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة :

1)حيز تعريف الدالة f هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$
و منه $D=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{2x+3}{x+2}=-\infty$$

و $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{2x+3}{x+2}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=2$ مقارب عمودي للمنحنى.

3) **طريقة 1 :**

$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

لكل x من D لدينا:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+2}\right)'=\frac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2(x+2)-1\times(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}>0$ لكل x من D

طريقة 2 : لكل x من D لدينا: $f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ f'(x)>0$

4) جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة :

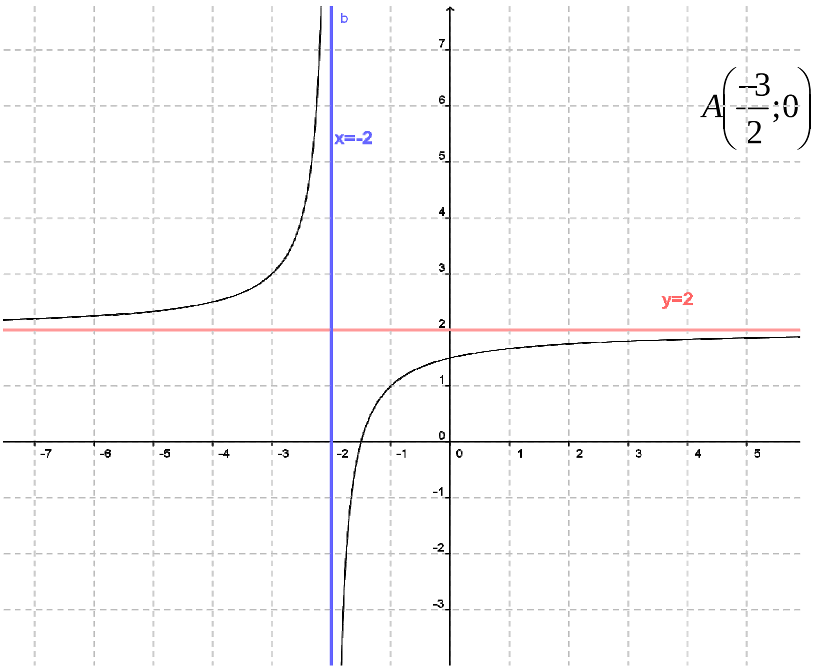
$f(x)=0$ يعني $\frac{2x+3}{x+2}=0$ يعني $2x+3=0$

يعني $x=\frac{-3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع مع محور الأفاصيلهي : $A\left(\frac{-3}{2};0\right)$

6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيبنحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=\frac{3}{2}$ ومنه نقطة التقاطع هي: $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

7) رسم: C_f



تمرين14: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3. بين : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\geq 0\}$

$$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\frac{-1+3}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ و $x_2=\frac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x^2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{(4x^2+2x-2)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

(2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty} 4x^2=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

(3 $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$

ومنه

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

(4 ومنه : $y=ax+b$ أي $y=-2x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$