ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الجداء السلمي

I. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

تعاريف: ليكن $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى نقول إن $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان : $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=1$ و $\vec{i}.\vec{j}=0$

نقول إن المعلم $(0;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما.

دائما في جميع فقرات الدرس ننسب المستوى إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(0;\vec{i};\vec{j})$

خاصية: لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. متجهتين من المستوى , لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

وتكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}.\vec{v}=0$

منظم متجهة: لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة من المستوى منظم المتجهة $\vec{u}$ نرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

المسافة بين نقطتين: لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين من المستوى , المسافة هي : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

ملاحظة : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

صيغة cos و sin: لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

لدينا:
$$\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$
و
$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

تعريف : ليكن (D) مستقيم في المستوى

نسمي متجهة منظميه على المستقيم (D) , كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع متجهة موجهة للمستقيم (D)

(D) $ax+by+c=0$ متجهة منظمية على المستقيم (D) هي: $\vec{n}(a;b)$

خاصية: معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظميه عليه هي : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

مثال : حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه عليه

الجواب: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظميه عليه و نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظميه على (D)

اذن: $a=2;b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2)\in(D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني : $2\times1-3\times2+c=0$ يعني $c=4$ ومنه : $(D)/2x-3y+4=0$

خاصية: ليكن (D) و (D') مستقيمين معادلاتهما على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كانت متجهتاهما المنظميتان عليهما متعامدتان أي : $aa'+bb'=0$

تعريف : ليكن (D) مستقيما معادلته: $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى.

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A;(D))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال : $(D)\ x-y+2=0$ و $A(1;4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

الجواب: $d(A;(D))=\frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

خاصية: معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$

وشعاعها R $(R\succ0)$ هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

وتكتب أيضا : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث : $c=a^2+b^2-R^2$

مثال1: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1;-3)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : $(C)\ (x-(-1))^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة أو النشر فنجد : $(C)\ x^2+y^2+2x+6y+8=0$

خاصية و تعريف: الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$

وشعاعها R $(R\succ0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى

التي تحقق النظمة : $(S)\ \begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases}$

و النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

مثال : حدد تمثيلا بارا متريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : تمثيل بارا متري للدائرة (C) هو : $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta \\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$ بارا متري حقيقي

خاصية : لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+ax+by+c=0$

- تكون (E) دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2+b^2-4c>0$ ومركز هذه الدائرة هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

و شعاعها هو $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

- إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فان : (E) هي المجموعة الفارغة
- إذا كان $a^2+b^2-4c=0$ فان (E) هي : $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$

تعاريف: لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ 0)$ و M نقطة من المستوى

- تكون النقطة M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M=R$
- تكون النقطة M خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\succ R$
- تكون النقطة M داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان : $\Omega M\prec R$

الأوضاع ا لنسبية لمستقيم و دائرة في المستوى: لدراسة الوضع النسبي لمستقيم (D) و دائرة (C) مركزها Ω وشعاعها R

يمكننا حساب $d(\Omega;(D))$ مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) ومقارنتها بالشعاع R وبالطبع هناك ثلاث حالات :

- إذا كانت $d(\Omega;(D))\succ R$ فان: المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)
- إذا كانت $d(\Omega;(D))\prec R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين
- إذا كانت $d(\Omega;(D))=R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة و نقول أيضا أن (D) مماس للدائرة (C)

معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة:

تذكير: يكون المستقيم (D) مماسا للدائرة (C) ذات المركز Ω عند النقطة A إذا وفقط إذا كان : (D) عموديا على المستقيم (ΩA)

خاصية: لتكن الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من الدائرة (C)

معادلة ديكارتية للمماس للدائرة (C) في النقطة A هي : $(x-x_A)\left(\frac{a}{2}+x_A\right)+(y-y_A)\left(\frac{b}{2}+y_A\right)=0$

ملحوظة : حصلنا على معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A باستعمال التكافؤ : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

مثال : لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي : $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1) تأكد أن $A(0;1)\in(C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب : 1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$ (1) ومنه $A(0;1)\in(C)$

لدينا $a=4;b=-2;c=1$ نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4\times1=16+4-4=16>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;1)$ وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$ ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$ و $\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$x=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم الذي معادلته : $(D):x=0$