السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	تحليلية الجداء السلمي حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $(D): x=y$ و $(\Delta): 4x-3y+2=0$ و الدائرة : $(C): x^2+y^2-6x+4y-3=0$

1	لدينا : $x^2+y^2-6x+4y-3=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+4y+4=3+9+4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=16$ بالتالي (C) دائرة مركزها $\Omega(3;-2)$ و شعاعها $r=\sqrt{16}=4$
2	لدينا : $d(\Omega;(\Delta))=\dfrac{\lvert 4x_\Omega-3y_\Omega+2\rvert}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{\lvert 12+6+2\rvert}{5}=\dfrac{20}{5}=4=r$ إذن : (Δ) مماس للدائرة (C)
3	لدينا : $d(\Omega;(D))=\dfrac{\lvert x_\Omega-y_\Omega\rvert}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{\lvert 3+2\rvert}{\sqrt2}=\dfrac{5}{\sqrt2}<r$ إذن (C) و (D) يتقاطعان في نقطتين مختلفتين $\dfrac{5}{\sqrt2}\approx 3{,}53$

للتذكير : مسافة $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ عن $(D): ax+by+c=0$ هي : $d(\Omega;(D))=\dfrac{\lvert ax_\Omega+by_\Omega+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

إذا كانت $d(\Omega;(D))=r$ فإن (D) مماس للدائرة : $\zeta(\Omega;r)$

تمرين 2 : $A(2,1)$ و $B(1,-2)$ و $C(-1,2)$

1	أ)	لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1)$ ، منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3-3=0$ و $AB=\lVert\overrightarrow{AB}\rVert=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$ و $AC=\lVert\overrightarrow{AC}\rVert=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .
	ب)	بما أن ABC قائم الزاوية في A فهو محاط بدائرة قطرها هو وتره، أي مركزها منتصف $[BC]$ و شعاعها $r=\dfrac{BC}{2}$ لتكن K منتصف $[BC]$ ، إذن: $K\left(\dfrac{x_B+x_C}{2};\dfrac{y_B+y_C}{2}\right)$ أي : $K(0;0)$ ولدينا : $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt5$ منه : $r=\sqrt5$ ، بالتالي : معادلة الدائرة (ζ) المحيطة بالمثلث ABC هي : $(\zeta): (x-x_K)^2+(y-y_K)^2=r^2$ أي : $(\zeta): x^2+y^2=5$
2		لدينا : $d(K;(\Delta_1))=\dfrac{\lvert 5\rvert}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt5}=\sqrt5=r$ إذن المستقيم $(\Delta_1): x+2y+5=0$ مماس للدائرة (ζ)
3		لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2;y-1)$ و $\overrightarrow{AK}(-2;-1)$ منه : $M\in(L) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}=0 \Leftrightarrow -2(x-2)-1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+4-y+1=0$ $M\in(L) \Leftrightarrow -2x-y+5=0 \Leftrightarrow 2x+y-5=0$ بالتالي : $(L): 2x+y-5=0$

تمرين 3 : نعتبر النقط : $A(4,0)$ و $B(0,2)$ و $C(2,-3)$

1	لتكن K منتصف $[OA]$ ، إذن: $K\left(\dfrac{x_A+x_O}{2};\dfrac{y_A+y_O}{2}\right)$ أي : $K(2;0)$ ولدينا : $OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$ منه شعاع الدائرة هو : $r=\dfrac{OA}{2}=2$

بالتالي : $(\zeta):(x-x_K)^2+(y-y_K)^2=r^2$ أي : $(\zeta):(x-2)^2+y^2=4$

يمكن تبسيط معادلة الدائرة لتصبح : $(\zeta):\ x^2-4x+y^2=0$

2

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ، لدينا : $\overrightarrow{BM}(x,y-2)$ و $\overrightarrow{BC}(2,-5)$

$$M\in(BC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -5x-2(y-2)=0 \Leftrightarrow -5x-2y+4=0$$

بالتالي : $(BC):\ 5x+2y-4=0$

3

أ) لدينا : $d(K;(BC))=\dfrac{|5x_K+2y_K-4|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{29}}<2$ إذن (ζ) و (BC)

إذن المستقيم (BC) يقطع الدائرة (ζ) في نقطتين مختلفتين

ب) لدينا : $\overrightarrow{BC}(2,-5)$ موجهة لـ (BC) و $B\in(BC)$ إذن: $(BC):\begin{cases} x=0+2t \\ y=2-5t \end{cases} /\ t\in IR$

ج) لكي نحدد إحداثيتي نقطتي تقاطع (BC) و (ζ) سنحل النظمة المكونة من معادلة الدائرة (ζ) و التمثيل البارامتري للمستقيم (BC):

$$(BC):\begin{cases} x=2t \\ y=2-5t \\ x^2-4x+y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} 4t^2-8t+(2-5t)^2 & =0 \\ 4t^2-8t+4-20t+25t^2 & =0 \\ 29t^2-28t+4 & =0 \end{array}$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية : $\Delta=28^2-4\times4\times29=784-464=320=64\times5>0$

منه: $t=\dfrac{28+8\sqrt{5}}{58}=\dfrac{14+4\sqrt{5}}{29}$ أو $t=\dfrac{28-8\sqrt{5}}{58}=\dfrac{14-4\sqrt{5}}{29}$

منه :
$$\begin{cases} x=2\times\dfrac{14+4\sqrt{5}}{29}=\dfrac{28+8\sqrt{5}}{29} \\ y=2-5\times\dfrac{14+4\sqrt{5}}{29}=\dfrac{58-70-20\sqrt{5}}{29}=\dfrac{-12-20\sqrt{5}}{29} \end{cases}$$

أو
$$\begin{cases} x=2\times\dfrac{14-4\sqrt{5}}{29}=\dfrac{28-8\sqrt{5}}{29} \\ y=2-5\times\dfrac{14-4\sqrt{5}}{29}=\dfrac{58-70+20\sqrt{5}}{29}=\dfrac{-12+20\sqrt{5}}{29} \end{cases}$$

بالتالي (BC) و (ζ) يتقاطعان في النقطتين:

$$E\left(\frac{28+8\sqrt{5}}{29};\frac{-12-20\sqrt{5}}{29}\right) \text{ و } E\left(\frac{28-8\sqrt{5}}{29};\frac{-12+20\sqrt{5}}{29}\right)$$

عمليا و خصوصا في الفروض نراعي أن تكون النتائج بسيطة، بمعنى أن لا تتضمن جذورا مربعة، لكننا آثرنا أن تتضمن الحلول الجذور المربع حتى يتم استيعاب الطريقة العامة لإيجاد إحداثيتي نقطتي تقاطع دائرة و مستقيم.

تمرين 4 : $(C):\quad x^2+y^2-2x+4y+1=0$

1

أ) لدينا : $x^2+y^2-2x+4y+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$

إذن (C) دائرة مركزها $\Omega(1,-2)$ و شعاعها $r=\sqrt{4}=2$

ب) لدينا معادلة محور الأفاصيل هي : $(Ox):\ y=0$ ، منه : $d(\Omega;(Ox))=\dfrac{|y_\Omega|}{\sqrt{0^2+1^2}}=2=r$

إذن محور الأفاصيل مماس لـ (C) و حدد نقطة التماس

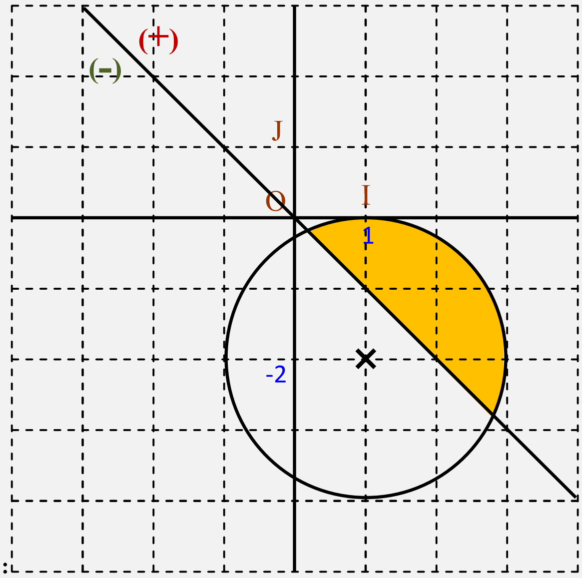
نعتبر المستقيم $(\Delta):\ x+y=0$

الحل المبياني للنظمة تعني البحث عن مجموعة النقط التي توجد داخل الدائرة (C) و في نفس الوقت توجد في نصف المستوى الموجب الذي يحدده المستقيم (Δ)

للتذكير لمعرفة هذا النصف مستوى نختار نقطة من أحد نصفي المستوى الذي يحددهما (Δ)، مثلا $J(0,1)$ نعوض إحداثيتيها في معادلة (Δ) فنجد: $0+1=1>0$ إذن J توجد في نصف المستوى الموجب.

إذن حلول النظمة $\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+1<0 \\ x+y>0 \end{cases}$ مبيانيا هي مجموعة النقط الملونة باللون الأصفر جانبه.

2



تمرين 5 : $(E):\ \ 6x-4y+3<x^2+y^2<2x+10y+10$

لدينا :

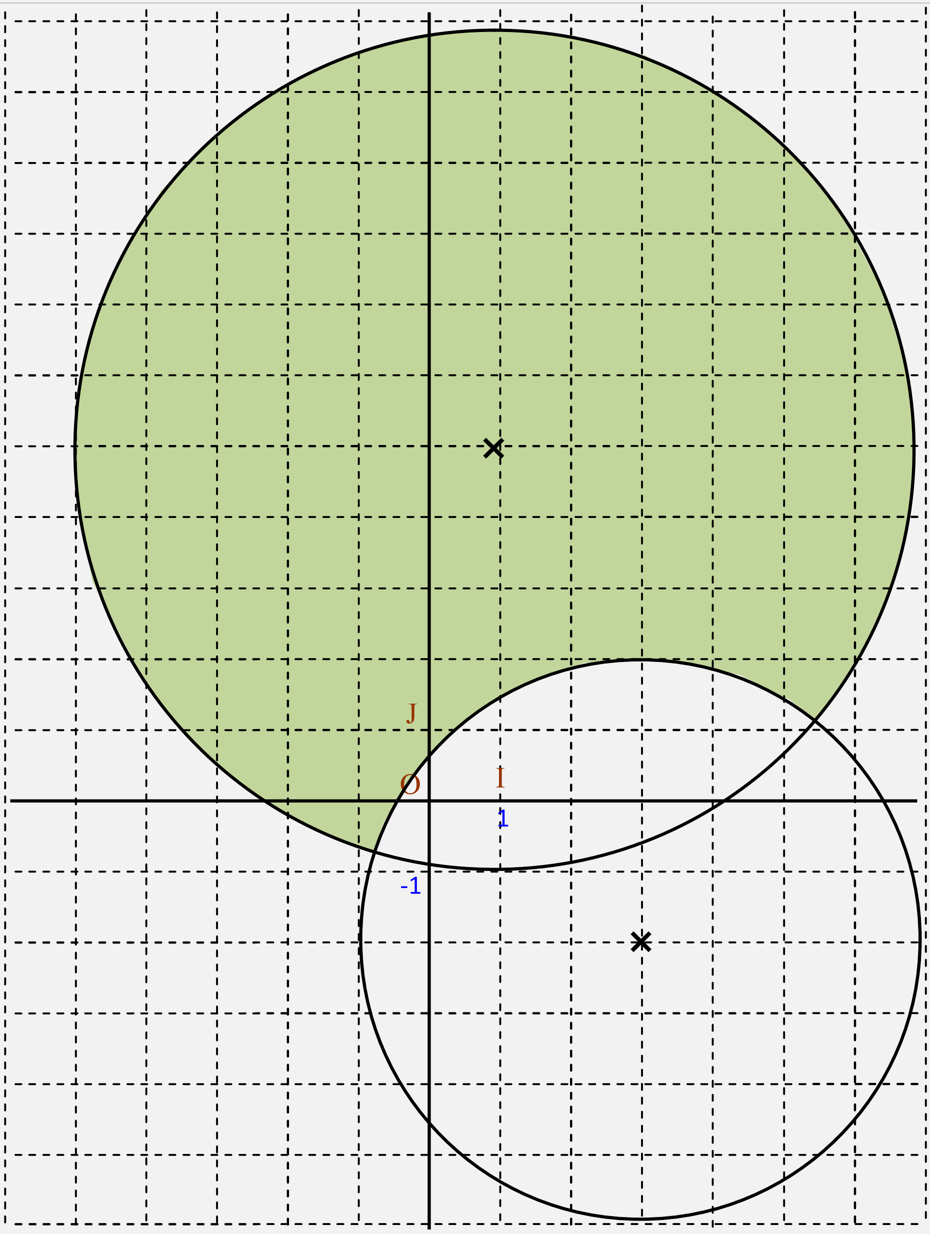
$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4y+3<x^2+y^2 \\ x^2+y^2<2x+10y+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-6x+4y-3>0 \\ x^2+y^2-2x-10y-10<0 \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+9+y^2+4y+4-3-9-4>0 \\ x^2-2x+1+y^2-10y+25-10-1-25<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2-16>0 \\ (x-1)^2+(y-5)^2-36<0 \end{cases}$$

نعتبر الدائرتين : $(C_1):\ (x-3)^2+(y+2)^2-16>0$ و $(C_2):\ (x-1)^2+(y-5)^2-36<0$

الدائرة (C_1) مركزها $A(3;-2)$ و شعاعها $r_1=4$ و الدائرة (C_2) مركزها $B(1;5)$ و شعاعها $r_2=6$

إذن حل النظمة هي النقط الموجودة خارج الدائرة (C_1) و داخل الدائرة (C_2)


J
O
I
1
-1