

(1) نهايات مرجعيةليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم لدينا :

النهاية عند الصفر	النهاية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
إذا كان n عدد زوجي فإن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	إذا كان n زوجي فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
إذا كان n عدد فردي فإن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$	و إذا كان n فردي فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

(2) النهاية عند نقطة a • إذا كانت f دالة معرفة في a وكانت f دالة حدودية أو دالة جذرية أو دالة الجذر فإن :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

• ليكن a عددا حقيقيا لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

• وإذا كان $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ لكل k من \mathbb{Z} ؛ فإن $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$$

(3) نهايات هامة :ليكن a عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجي فإن} \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ فردي فإن} \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \diamond$$

(4) عمليات على النهايات

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$-\infty \pm l = -\infty$	$+\infty \pm l = +\infty$	الأشكال المحددة
$(l \neq 0); l \times \infty = \infty$	$\infty \times \infty = \infty$	$(l \neq 0); \frac{l}{0} = \infty$	$\frac{l}{\infty} = 0$	

$(+\infty)+(-\infty)$ $(+\infty)-(+\infty)$	$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	الأشكال الغير محددة
--	-------------------	-------------------------	---------------	---------------------

يراعى في العمليات الحسابية جداء و خارج الإشارات

(5) نهايات دوال حدودية أو جذرية عند $+\infty$ أو $-\infty$

خاصية 1 : نهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حددها الأعلى درجة

أي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $a_n \neq 0$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

خاصية 2 : نهاية دالة جذرية عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأعلى درجة

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \text{ أي إذا كانت}$$

حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $m \in \mathbb{N}^*$ و $a_n \neq 0$ و $b_m \neq 0$

$$\text{فإن : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

(6) النهايات والترتيب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن } \begin{cases} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \quad \text{⊗ إذا كان لكل } x \text{ من }]a; +\infty[:$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ فإن } \begin{cases} f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{⊗ إذا كان لكل } x \text{ من }]a; +\infty[:$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ فإن } \begin{cases} |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \quad \text{⊗ إذا كان لكل } x \text{ من }]a; +\infty[:$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ فإن } \begin{cases} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \end{cases} \quad \text{⊗ إذا كان لكل } x \text{ من }]a; +\infty[:$$

تبقى هذه الخصائص صحيحة أيضا عندما يؤول x إلى a أو إلى a على اليمين أو على اليسار أو $-\infty$