ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس النهايات

1)نهايات اعتيادية:

• $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ إذا كان n زوجي • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ إذا كان n فردي

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليمين

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

2)خاصية : لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا

إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

3)النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x) = l$ "

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x) = l$ "

4)نهايات اعتيادية: • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \sqrt{x} = 0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

•إذا كان n زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان n فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال1: أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-5}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x^5}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-12}{x^4}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x^5} + \infty$

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$ 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ 6) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}} = 0+7+\infty = +\infty$

مثال2: أحسب النهايات التالية:1) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{3x+1}{2x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5x-20}{-2x+4}$

أجوبة 1): $\lim\limits_{x\to 3^+} 3x+1 = 9+1 = 10$ و $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-6 = 0$

x	$-\infty$ $\quad 3 \quad$ $+\infty$
$2x-6$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-6 = 0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to 3^-} 2x-6 = 0^-$ بالتالي : $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$

2) لدينا $\lim\limits_{x\to 2^+} 5x-20 = -10$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} -2x+4 = 0$

x	$-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$
$-2x+4$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$

5)العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عددان حقيقيانو هذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

a) النهاية و الجمع:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

b) النهاية و الضرب:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	0	
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$l' \cdot l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

c) النهاية و المقلوب:

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

d) النهاية و الخارج:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	∞	∞	∞	$-\infty$ $l\prec 0$	$+\infty$ $\succ 0$	$+\infty$ $l\succ 0$	$-\infty$ $\prec 0$	∞		$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\neq 0$	∞	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	0		$-\infty$ $+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$		∞	∞	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	شكل غير محدد	

الأشكال الغير محددة هي : $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0\times\infty$ و $(-\infty)+(+\infty)$

6)نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4$ الجواب: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4 = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$

7)نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

مثال : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}2x^{6-4}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

8) نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $f(x)\ge 0\ \forall x\in[a;+\infty[$

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $l\ge 0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $l\ge 0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

أمثلة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

9) مبرهنة:

لتكن f دالة عددية و l و a عددين حقيقيين

$\lim_{x\to a^+}f(x)=l$ يكافئ $\lim_{\substack{x\to a\\x\succ a}}f(x)=\lim_{\substack{x\to a\\x\prec a}}f(x)=l$

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^4$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$
2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=0$ ؟

أجوبة :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x}{x}+x^4, x>0\\ f(x)=-\frac{x}{x}+x^4, x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1+x^4, x>0\\ f(x)=-1+x^4, x<0\end{cases}$$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+x^4=1$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}-1+x^4=-1$

2) نلاحظ أن : $\lim_{x\to4^-}f(x)\ne\lim_{x\to4^+}f(x)$

ومنه لدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=0$

10) نهاية الدوال المثلثية

خاصيات:

- $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ • $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ • $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$
- $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{ax}=1$ $\forall a\in\mathbb{R}^*$

أمثلة: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{4x}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\tan 3x}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}$

أجوبة :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{1}{2}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{6x}\times\frac{6x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{6x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times2=1\times1\times2=2$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{2x}{4x}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

11) النهايات و الترتيب

خاصيات: لتكن I مجالا من نوع $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $l\in\mathbb{R}$

لتكن f و U و V دوال عددية معرفة على المجال I اذا

- اذا كانت $U(x)\le f(x)\ \forall x\in I$ وكانت: $\lim_{x\to+\infty}U(x)=+\infty$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- اذا كانت $f(x)\le V(x)\ \forall x\in I$ وكانت $\lim_{x\to+\infty}V(x)=-\infty$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
- اذا كانت $U(x)\le f(x)\le V(x)\ \forall x\in I$ وكانت: $\lim_{x\to+\infty}U(x)=\lim_{x\to+\infty}V(x)=l$ فان : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$

مثال: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin x\le1$

اذن : $2x-1\le\sin x+2x\le1+2x$ اذن : $2x-1\le\sin x+2x$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)=+\infty$

تمرين: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$

الجواب: لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$