

## النهايات

الدراس الأولى	الدورة الثانية 10 ساعة	القدرات المنتظرة حساب نهايات الدوال المحدودة والدوال المحددة والدوال اللاجذرية؛ حساب نهايات الدوال المتعدية البسيطة باستعمال النهايات الاعتيادية
---------------	---------------------------	--

### 1- النهاية لا منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نشاط

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^3$

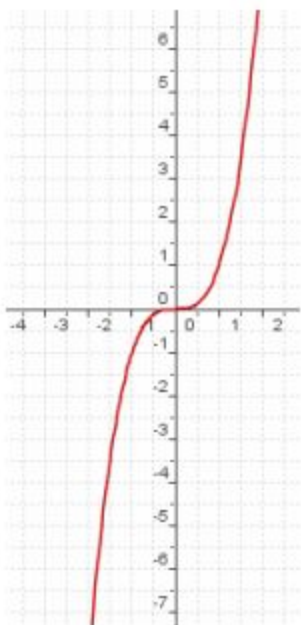
1- أرسم  $f$

2- أتمم الجدول التالي

$x$	$-10^{1000}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^9}$	$-10^{100}$	$-10$	$10$	$10^{100}$	$10^{10^9}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمة أكبر فأكثر و موجبة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$   
ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيمة أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$



نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ  $x$  قيمة أكبر فأكثر و موجبة فان  $f(x)$  تأخذ قيمة أكبر فأكثر و موجبة وتؤول الى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ نكتب}$$

نلاحظ من خلال الجدول و المنحنى عندما يأخذ  $x$  قيمة أصغر فأصغر و سالبة فان  $f(x)$  تأخذ قيمة أصغر فأصغر و سالبة وتؤول الى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ نكتب}$$

### كنايات و نهايات اعتيادية

لنكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a; +\infty[$

إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و نقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

و نقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $]-\infty; a]$   
 إذا كان  $f(x)$  يؤوّل إلى  $+\infty$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{-\infty} f(x) = +\infty$   
 و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$   
 إذا كان  $f(x)$  يؤوّل إلى  $-\infty$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$   
 و تقرأ نهاية  $f(x)$  هي  $-\infty$  عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$

### نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ إذا كان } n \text{ زوجي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ إذا كان } n \text{ فردي}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

### 2- النهاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نشاط

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

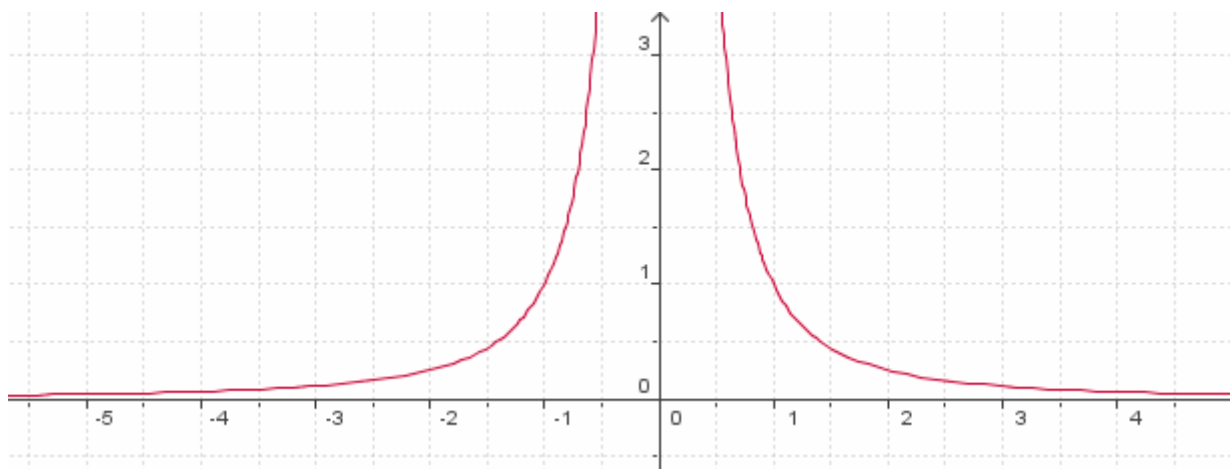
1- باستعمال احد البرامج المعلوماتية أرسم  $C_f$

2- أتمم الجدول التالي

$x$	$-10^{10^{100}}$	$-10^{10^{12}}$	$-10^{10^9}$	$-10^{100}$	$-10$	$10$	$10^{100}$	$10^{10^9}$	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$										

من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤوّل  $x$  إلى  $+\infty$   
 ماذا تستنتج لـ  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤوّل  $x$  إلى  $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين  $f(x)$  يؤوّل إلى 0 نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \text{ حيث } f \text{ تعتبر الدالة}$$

1- أرسم  $C_f$

2- خذ قيما أكبر فأكبر وموجبة و أملئ بها الجدول

$x$									
$f(x)$									

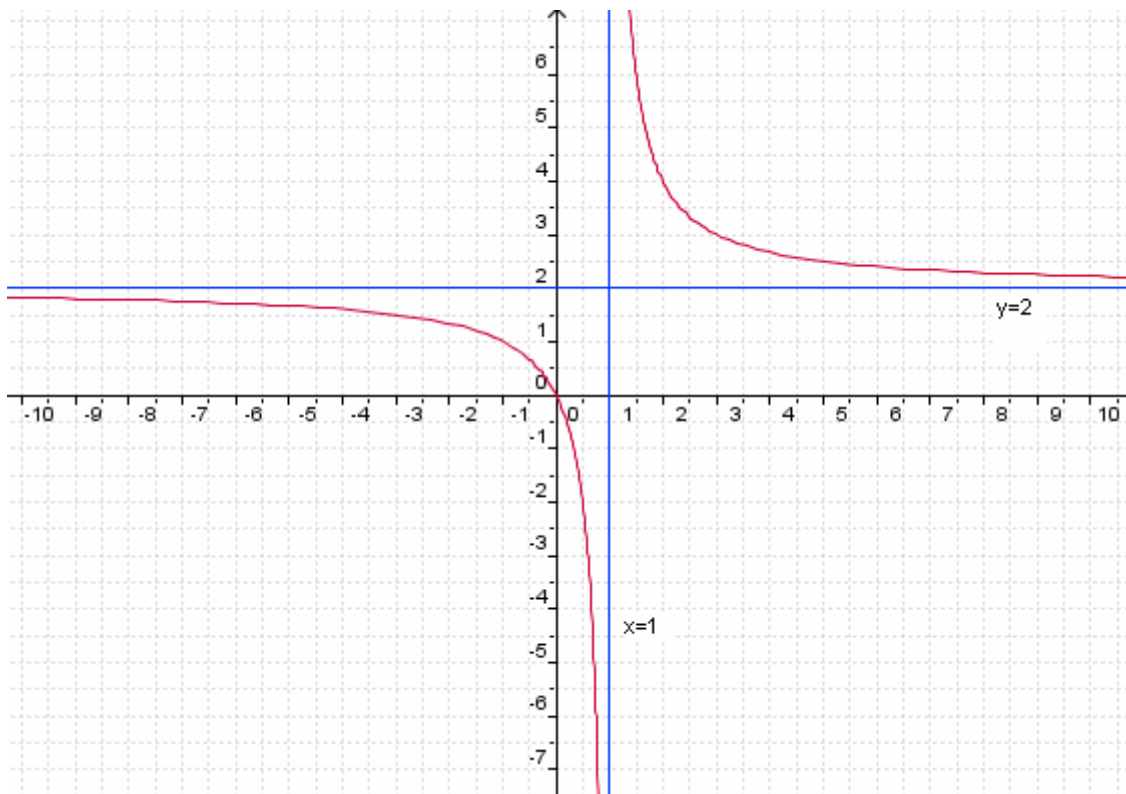
من خلال الشكل و الجدول

ماذا تستنتج ل  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيما أكبر فأكبر و موجبة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$

خذ قيما أصغر فأصغر وسالبة و أملئ بها الجدول

$x$									
$f(x)$									

ماذا تستنتج ل  $f(x)$  عندما يأخذ  $x$  قيما أصغر فأصغر و سالبة أي عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$



نلاحظ في كلتا الحالتين  $f(x)$  يؤول إلى 2 نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

**النهاية منتهية عند  $+\infty$**

لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]a; +\infty[$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  أو  $\lim_{+\infty} f(x) = l$

**النهاية منتهية عند  $-\infty$**

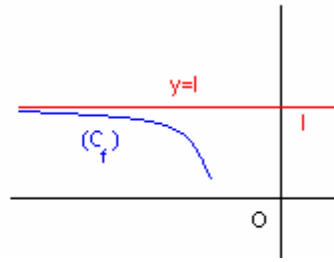
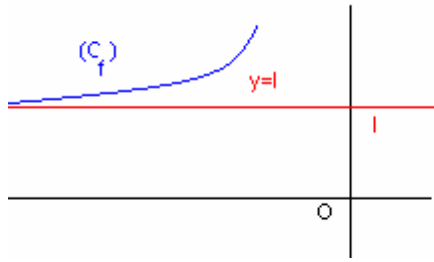
لتكن  $f$  يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]-\infty; a[$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  أو  $\lim_{-\infty} f(x) = l$

**ملاحظات**

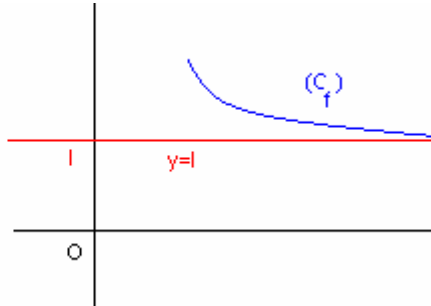
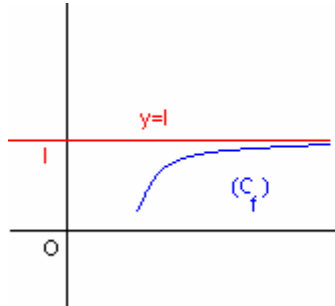
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر وأكثر من المستقيم ذا المعادلة  $y = l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^*$$

منحنى الدالة يقترب أكثر وأكثر من المستقيم ذا المعادلة  $y = l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$



-\* إذا كانت  $f$  زوجية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

-\* إذا كانت  $f$  فردية فان  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**نهايات اعتيادية**

$$\forall (k; n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

**خاصية**

لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقيا  
 • إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  أو  $-\infty$  فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

**تمرين**

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 1}{x^2} \text{ نعتبر}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3 \text{ بين أن}$$

**الجواب**

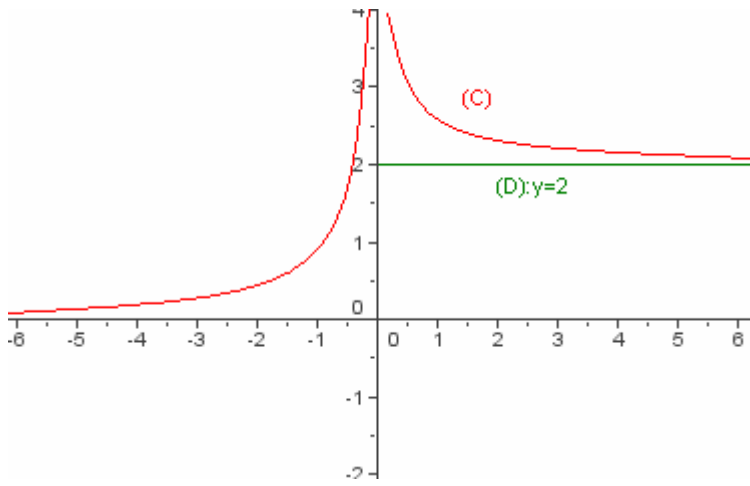
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 1}{x^2} + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{اذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

**تمرين : قراءة نهايات مبيانيا**

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}^*$  من خلال الشكل

حدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



من خلال الشكل

المنحنى يقترب من المستقيم  $(D): y = 2$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

المنحنى يقترب من محور الأفاصيل عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**3- نهاية منتهية و لا منتهية لدالة في نقطة نشاط**

نعتبر الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = \frac{1}{x^2}$

1- أ / أرسم  $C_f$

ب / أتمم الجدول التالي

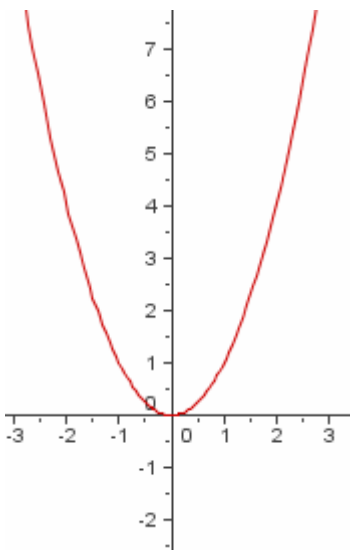
$x$	-0,2	-0,1	-0,001	$-10^{-30}$	$10^{-30}$	0,001	0,1	0,2
$f(x)$								

من خلال الشكل و الجدول ماذا تلاحظ استنتج  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2- أتمم الجدول التالي

$x$	-0,2	-0,1	-0,001	$-10^{-30}$	$10^{-30}$	0,001	0,1	0,2
$g(x)$								

من خلال الجدول ماذا تلاحظ تضن  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$



1/ من خلال الشكل و الجدول

نلاحظ أن  $f(x)$  تؤول إلى 0 عندما يؤول  $x$  إلى 0

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي 0 عند 0

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2/ من خلال الجدول

نلاحظ أن  $f(x)$  تأخذ قيمة أكبر فأكبر وموجبة أي تؤول إلى  $+\infty$  عندما

يؤول  $x$  إلى 0

نقول إن نهاية  $f(x)$  هي  $+\infty$  عند 0

نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

### نهاية منتهية لدالة في نقطة

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين و  $f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]a - \alpha; a + \alpha[$  أو مجموعة من نوع  $]a - \alpha; a + \alpha[ - \{a\}$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$   
 إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  أو  $\lim_a f = l$

### خاصية

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$   
 إذا كان  $f(x)$  تغبل  $l$  في  $a$  عان النهاية وحيدة

### نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم  
 $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$

أمثلة  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$   $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

### نهاية لامنتهية لدالة في نقطة

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين و  $f$  دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع  $]a - \alpha; a + \alpha[$  أو مجموعة من نوع  $]a - \alpha; a + \alpha[ - \{a\}$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$   
 إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_a f = +\infty$   
 إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_a f = -\infty$

### 3-النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

#### نشاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

حدد  $D_f$

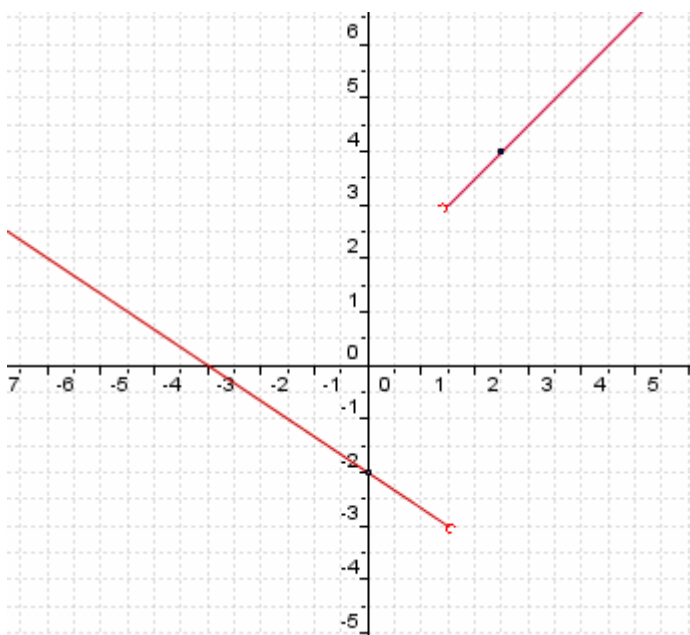
أنشئ  $C_f$

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 1 على اليمين  
 من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 1 على اليسار

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليمين إلا و  $f(x)$  تقترب من 3 نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 1 على اليمين هي 3 نكتب  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$  أو  $\lim_{x > 1} f(x) = 3$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 1 على اليسار إلا و  $f(x)$  تقترب من -3 نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 1 على اليسار هي -3 نكتب  
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3$  أو  $\lim_{x < 1} f(x) = -3$



## نشاط

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = \frac{1}{x}$

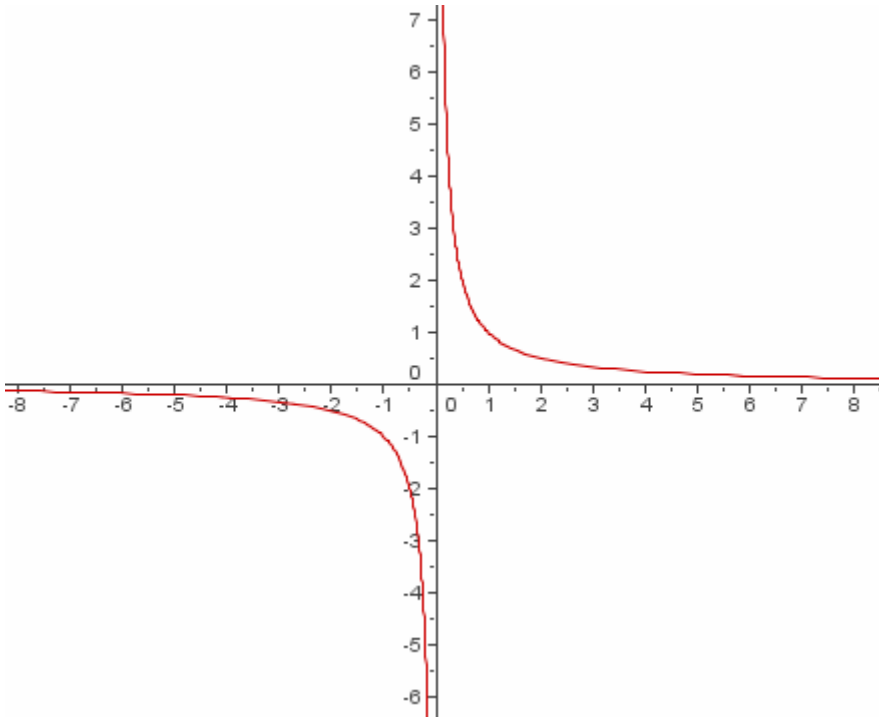
حدد  $D_f$

أنشئ  $C_f$

من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 0 على اليمين  
من خلال التمثيل المبياني حدد إلى ماذا يؤول  $f(x)$  عندما يقترب  $x$  من 0 على اليسار

-----

$$D_f = \mathbb{R}^*$$



نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليمين فإن  $f(x)$  تؤول  $+\infty$  نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 0 على اليمين هي  $+\infty$  نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{أو}$$

نلاحظ أن كلما اقتربنا من 0 على اليسار فإن  $f(x)$  تؤول  $-\infty$  نقول إن نهاية  $f(x)$  عندما يؤول  $x$  إلى 0 على اليسار هي  $-\infty$  نكتب  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{أو}$$

ليكن  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

إذا كان  $f(x)$  تؤول إلى  $-\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty$

## نهايات اعتيادية

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ زوجيا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{إذا كان } n \text{ فرديا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

مبرهنة

لتكن  $f$  دالة عددية

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

تمرين

لتكن  $f$  دالة عددية حيث

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & x > 0 \\ f(x) = x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{حدد } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ استنتج } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

الجواب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

تمرين

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} \quad \text{لتكن } f \text{ دالة عددية حيث}$$

$$-1 \quad \text{بين أن } \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = 4$$

$$-2 \quad \text{استنتج } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$-3 \quad \text{هل الدالة } f \text{ تقبل نهاية في } -2$$

الجواب

$$-1 \quad \text{نبين أن } \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$$

$$\text{ضع } X = x + 2 \quad \text{أي } X - 2 = x$$

$$\text{عندما يؤول } x \text{ أي } -2 \text{ فإن } X \text{ تؤول إلى } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = \lim_{X \rightarrow 0} X - 4$$

$$\text{و حيث أن } \lim_{X \rightarrow 0} X = 0 \quad \text{فان } \lim_{X \rightarrow 0} [(X - 4) - (-4)] = \lim_{X \rightarrow 0} X = 0 \quad \text{اذن } \lim_{x \rightarrow -2} x - 2 = -4$$

$$\text{نبين أن } \lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -2} -x + 2 = \lim_{X \rightarrow 0} -X + 4$$

وحيث أن  $\lim_{X \rightarrow 0} -X = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -2} -x - 2 = 4$   $\lim_{X \rightarrow 0} -X + 4 = 44$   $\lim_{X \rightarrow 0} [(-X + 4) - 4] = \lim_{X \rightarrow 0} -X = 0$

2/ نستنتج  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

لدينا  $\forall x > -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x - 2 = -4$

لدينا  $\forall x < -2 \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)} = -x + 2$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -x - 2 = 4$

3/ لدينا  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  إذن الدالة  $f$  لا تقبل نهاية في  $-2$

#### 4- العمليات على النهايات

نقبل جميع العمليات الآتية

نعتبر دالتين  $f$  و  $g$ .

عند  $x_0$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار أو عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  تكون لدينا النتائج التالية:

#### أ- نهاية مجموع

نهاية $f + g$	نهاية $g$	نهاية $f$
$l + l'$	$l'$	$l$
$+\infty$	$+\infty$	$l$
$-\infty$	$-\infty$	$l$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$

#### ب- نهاية جداء

نهاية $f \times g$	نهاية $g$	نهاية $f$
$l \times l'$	$l'$	$l$
$\infty$ مع وضع إشارة $l$	$+\infty$	$l \neq 0 \quad l$
$\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$	$-\infty$	$l \neq 0 \quad l$
شكل غير محدد	$+\infty$	$0$
شكل غير محدد	$-\infty$	$0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

#### ملاحظة:

لحساب نهاية  $f$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$  يمكن اعتبار  $\lambda f$  كجداء الدالة

الثابتة  $\lambda \rightarrow x$  التي نهايتها هي  $\lambda$  و الدالة  $f$

**ج- نهاية خارج**

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية $g$	نهاية $f$
$\frac{l}{l'}$	$l' \neq 0$ و $l'$	$l$
0	$+\infty$	$l$
0	$-\infty$	$l$
$+\infty$	$0^+$	$+\infty$ أو $l > 0$
$-\infty$	$0^+$	$-\infty$ أو $l < 0$
$-\infty$	$0^-$	$+\infty$ أو $l > 0$
$+\infty$	$0^-$	$-\infty$ أو $l < 0$
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
$\infty$ مع وضع إشارة $l$	$l$ حيث $l \neq 0$	$+\infty$
$\infty$ مع وضع عكس إشارة $l$	$l$ حيث $l \neq 0$	$-\infty$

**د- نهاية دالة حدودية - دالة جذرية**

لتكن  $P(x)$  و  $Q(x)$  حدوديتين

$$Q(a) \neq 0 \quad \text{في حالة} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

إذا كانت  $ax^n$  و  $bx^m$  هما على التوالي حديتي  $P(x)$  و  $Q(x)$  الأكبر درجة فان

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

**أمثلة**

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2^3 - 2^2 + 6 - 1 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 3} = \frac{-3(-1)^2 - (-1) + 1}{3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

### تمرين

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{-x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

### الجواب

نحدد النهايات

\* لدينا  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - x = 9 - 3 = 6$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + x - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6} = \frac{6}{6} = 1$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^5 = +\infty$

\*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 (-2x^2 + 5) = -\infty$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)^5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

\* إذا كان  $x < 2$  فإن  $x - 2 < 0$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^-$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1}$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x-1$		$-$	$+$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+$  و لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 5 = -3$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{x-1} = -\infty$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x}$

نحصل على الشكل الغير المحدد  $(+\infty - \infty)$

حيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)$

\* نحدد  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}$  بتعويض  $x$  نحصل على الشكل الغير المحدد  $\frac{0}{0}$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\} \quad \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{4} \text{ ومنه}$$

$$\frac{0}{0} \text{ نحدد } * \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} \text{ بتعويض } x \text{ نحصل على الشكل الغير المحدد}$$

ومنه الحدوديتان  $x^2 + x - 2$  و  $2x^2 + x - 3$  تقبلان القسمة على  $x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \text{ نحدد } *$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$  و منه نحصل على الشكل الغير المحدد  $(+\infty - \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ ; } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ وحيث } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty \text{ فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2} \text{ نحدد } *$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ لدينا}$$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$0$	$- 0$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-2}{x^2 - 3x + 2} = -\infty \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 2 = 0^- \text{ ومنه}$$

## 6 - نهايات الدوال اللاجدرية خاصة

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال من شكل  $[a; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l} \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ و } l \geq 0 \text{ فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty \text{ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ و } l \geq 0 \text{ فان}$$

**ملحوظة:**

الخاصية تبقى صحيحة إذا كان  $x$  يؤول الى  $+\infty$  أو الى  $-\infty$  أو الى  $a$  على اليمين أو  $a$  على اليسار أمثلة:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{1-4x} = \sqrt{9} = 3 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -2} 1-4x = 9 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4} = \infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 - 5x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{1}{x} = +\infty \text{ لدينا}$$

## 7- النهايات والترتيب

$f$  و  $g$  و  $h$  دوال عددية و  $I = ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[ - \{x_0\}$  ضمن حيز تعريف هذه الدوال

\* إذا كان لكل  $x$  من  $I$  ،  $|f(x) - l| \leq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

\* إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$  وكان  $f \geq h \geq g$  على  $I$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

\* إذا كان لكل  $x$  من  $I$  ،  $f(x) \geq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

\* إذا كان لكل  $x$  من  $I$  ،  $f(x) \leq u(x)$  و كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

### ملاحظة

الخصيات السابقة تبقى صالحة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  أو عند  $x_0$  على اليمين أو عند  $x_0$  على اليسار مع تعويض  $I$  بالمجموعة المناسبة

### أمثلة

\* نحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x$

لدينا الدالة  $x \rightarrow \sin^2 x$  لا تقبل نهاية ونعلم أن  $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$  ومنه  $x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$

و حيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$

\* نبين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

لدينا  $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| = \left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right|$

و حيث أن  $|\sin x| \leq 1$  فان  $|\sin - 2| \leq |\sin x| + |2|$

ومنه  $\left| \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} - 2 \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1}$  أي  $\left| \frac{\sin x - 2}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{3}{x^2 + 1}$

و حيث  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 1} = 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + \sin x}{x^2 + 1} = 2$

### 8- نهايات مثلثية

#### أ/ خاصة

لكل عدد حقيقي  $a$

$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$  و  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

لكل عدد حقيقي  $a$  حيث  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  و  $k \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

#### أمثلة

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = \tan \pi = 0$

ب/ نقبل  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$   $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{ لنحدد}$$

$$x \neq 0 \text{ حيث } \frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|} \text{ ومنه } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \text{ لدينا}$$

$$\text{وبالتالي } \frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|} \text{ أي أن } |\cos x| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \text{ و } x \text{ و } \sin x \text{ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ لنحدد} *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sin X}{X} \right)^2 = \frac{1}{2} \text{ ومنه } X = \frac{x}{2} \text{ نضع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \text{ لنحدد} *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 \text{ لدينا}$$

**خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**نتيجة**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

**تمارين**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x} \text{ حدد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$$