تمارين محلولة:النهايات

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to-1}\left(3+x-3x^2\right)$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

أجوبة:1) $\lim_{x\to-1}3+x-3x^2=3+(-1)-3(-1)^2=3+(-1)-3=-1=l$

2) $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

تمرين2: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to+\infty}x^6$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}x^{2015}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}-7x^9$

أجوبة:1) $\lim_{x\to+\infty}x^6=+\infty$ 2) $\lim_{x\to-\infty}x^{2014}=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}x^{2015}=-\infty$ 4) $\lim_{x\to-}-7x^9=+\infty$

تمرين3: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

الأجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}=0^-$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}=0^+$

تمرين4: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$

4) $\lim_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$ 5) $\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : 1) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ 2) $\lim_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$ 3) $\lim_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$

4) $\lim_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$ 5) $\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ 6) $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

تمرين5: أحسب النهايات التالية:1) $\lim_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ 2) $\lim_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}$

أجوبة : $\lim_{x\to3^+}3x+1=9+1=10$ و $\lim_{x\to3^+}2x-6=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x-6$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to3^+}2x-6=0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

2) $\lim_{x\to3^-}2x-6=0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

تمرين6: أحسب النهايات التالية:1) $\lim_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim_{x\to2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

2) $\lim_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ 3) $\lim_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$

و $\lim_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}$ 4) $\lim_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ 5) $\lim_{x\to2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to2^+}3x-8=-2$ و $\lim_{x\to2^+}2x-4=0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to2^+}2x-4=0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=-\infty$

$\lim_{x\to2^-}2x-4=0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=+\infty$

2) $\lim_{x\to3^+}x-4=-1$ و $\lim_{x\to3^+}-2x+6=0$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to3^+}-2x+6=0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$

$\lim_{x\to3^-}-2x+6=0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$

3) $\lim_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$

$\lim_{x\to1^+}x-9=-8$ و $\lim_{x\to1^+}-2x^2+3x-1=0$

ندرس اشارة $-2x^2+3x-1$

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $-2x^2+3x-1$

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية

نجد أن : $-2x^2+3x-1=(x-1)(-2x+1)$

ومنه: $-2x^2+3x-1=0$ يعني $(x-1)(-2x+1)=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ أو $x=1$

x	$-\infty$	$1/2$		1	$+\infty$
$-2x^2+3x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to1^+}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=+\infty$ و $\lim_{x\to1^-}\frac{x-9}{-2x^2+3x-1}=-\infty$

4) $\lim_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$ لدينا $\lim_{x\to-2^+}-5x^2+1=-19$ و $\lim_{x\to-2^+}x+2=0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

ومنه : $\lim_{x\to-2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$ و $\lim_{x\to-2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$

5) لدينا $\lim_{x\to2^+}5x-20=-10$ و $\lim_{x\to2^+}-2x+4=0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	0	$-$

ومنه : $\lim_{x\to2^+}\frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$ و $\lim_{x\to2^-}\frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$

تمرين7: أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب :

$\lim_{x\to0^+} 3x = 0$ و $\lim_{x\to0^+} 7 = 7$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ ومنه: $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

تمرين8: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to+\infty}5x^4$ و 2) $\lim_{x\to+\infty}x^2-x$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to+\infty}5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل :

$\lim_{x\to+\infty}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=+\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ ومنه :

$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $0\times\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر: $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}x+\frac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

5) $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

تمرين9: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}$

أجوبة: 1) لدينا : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}=\frac{1}{7}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

ومنه : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x+7}+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x^2}=0$

3) $\lim_{x\to0}|x|=0^+$ ومنه: $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=+\infty$

تمرين10: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}$ 2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

أجوبة: 1) لدينا : $\lim_{x\to1}4x-5=-1$ و $\lim_{x\to1}|x-4|=3$

ومنه : $\lim_{x\to1}\frac{4x-5}{|x-4|}=-\frac{1}{3}$

2) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ لدينا : $\lim_{x\to2}x^2-4=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x+2=4$

تمرين11: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-9}$ 2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ 7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ 8) $\lim_{x\to0}\frac{-9}{\sqrt{x}}$

أجوبة: 1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-9=0$ و $\lim_{x\to3}x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}x+3=6$

2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim_{x\to\frac{1}{2}}4x^2-1=0$ و $\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}2x+1=2$

3) $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}$ لدينا: $\lim_{x\to3}x-3=0$ و $\lim_{x\to3}x^2-2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 3 جذرللحدودية x^2-2x-3

اذن : هي تقبل القسمة على : $x-3$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4}$

4) $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ لدينا: $\lim_{x\to1}2x^2-5x+3=0$ و $\lim_{x\to1}x^2+2x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $2x^2-5x+3$ و للحدودية x^2+2x-3

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

وأن : $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=\frac{-1}{4}$

5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$ لدينا: $\lim_{x\to2}3x^2-5x-2=0$ و $\lim_{x\to2}2x^2-5x+2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 2 جذرللحدودية $3x^2-5x-2$ و للحدودية $2x^2-5x+2$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-2$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$ وأن : $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(2x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{3x+1}{2x-1}=\frac{7}{3}$

6) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}$ لدينا : $\lim_{x\to1}2x^3+x^2-3=0$ و $\lim_{x\to1}2x^2+x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : 1 جذرللحدودية $2x^3+x^2-3$ و للحدودية $2x^2+x-3$

اذن : الحدوديتان تقبلان القسمة على : $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن :

$2x^3+x^2-3=(x-1)\left(2x^2+3x+3\right)$ وأن : $2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$

$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+x^2-3}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+3x+3\right)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+3x+3}{2x+3}=\frac{8}{5}$

7) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x\to2}x^4-16=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

الأستاذ : عثماني نجيب

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^4-2^4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2\right)^2-\left(2^2\right)^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2-2^2\right)\left(x^2+2^2\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)\left(x^2+4\right)=32$$

8) $\lim_{x\to0}-\frac{9}{\sqrt{x}}=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to0}\sqrt{x}=0^+$

تمرين12: أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4$

الجواب: نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

اذن : $\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x-4=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

تمرين13: أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}2x^{6-4}=\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$

تمرين14: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2$

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3-4x+12\right)$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ 7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

تمرين15: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ لدينا: $\lim_{x\to2}\sqrt{x-1}-1=0$ و $\lim_{x\to2}x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

تمرين16: أحسب النهايات التالية :1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ 4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 6) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ 7) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ 9) $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty}3x^2-5x+1=\lim_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-5x+1}=+\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}$ لدينا : $\lim_{x\to-\infty}-5x+7=+\infty$ اذن : $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-5x+7}=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}-3x=-\infty$ و $\lim_{x\to}\sqrt{6x^2+x-4}=+\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty}-3x\sqrt{6x^2+x-4}=-\infty$

4) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ لدينا: $\lim_{x\to1}\sqrt{x}-1=0$ و $\lim_{x\to1}x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ لدينا: $\lim_{x\to4}\sqrt{x}-2=0$ و $\lim_{x\to4}x-4=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

6) $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x-1}}$ لدينا : $\lim_{x\to1^+}1-2x=-1$ و $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0^+$ ومنه $\lim_{x\to1^+}\frac{1-2x}{\sqrt{x1}}=-\infty$

7) $\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ لدينا: $\lim_{x\to-3}1-\sqrt{x+4}=0$ و $\lim_{x\to-3}x+3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to-3}\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(1-\sqrt{x+4}\right)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{1^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{-x-3}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{-1}{1+\sqrt{x+4}}=-\frac{1}{2}$$

8) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}$ لدينا : $\lim_{x\to3}x^2-3x=0$ و $\lim_{x\to3}\sqrt{x-2}-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}-1}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)}=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{x-2}\right)^2-1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{x-3}=\lim_{x\to3}x\left(\sqrt{x-2}+1\right)=6$$

9) $\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ لدينا: $\lim_{x\to5}2-\sqrt{x-1}=0$ و $\lim_{x\to5}x-5=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{2^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{5-x}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{(x-5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{-1}{2+\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{4}$$

تمرين17: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$

1.أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to1^-}f(x)$

2.هل الدالة f تقبل نهاية عند $x_0=1$ ؟

أجوبة : 1)ندرس اشارة $x-1$: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$x-1$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-1}{x-1},x>1\\ f(x)=\frac{x^2-1}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1},x>1\\ f(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)},x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+1,x>1\\ f(x)=-(x+1),x<1\end{cases}$$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}x+1=2$ و $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

2) نلاحظ أن: $\lim_{x\to1^+}f(x)\neq\lim_{x\to1^-}f(x)$ ومنه الدالة f لا تقبل نهاية عند : $x_0=1$

تمرين18: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{x^2-16}{|x-4|}$

1.أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to4^+}f(x)$ و $\lim_{x\to4^-}f(x)$

2.هل الدالة f تقبل نهاية عند $x_0=4$ ؟

أجوبة : 1)ندرس اشارة $x-4$: $x-4=0\Leftrightarrow x=4$

x	$-\infty$ 4 $+\infty$
$x-4$	$-$ 0 $+$

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x^2-16}{x-4},x>4\\ f(x)=\frac{x^2-16}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4},x>4\\ f(x)=\frac{(x+4)(x-4)}{-(x-4)},x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=x+4,x>4\\ f(x)=-(x+4),x<4\end{cases}$$

$\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}x+4=8$ و $\lim_{x\to4^-}f(x)=\lim_{x\to4^-}-(x+4)=-8$

2) نلاحظ أن: $\lim_{x\to4^+}f(x)\neq\lim_{x\to4^-}f(x)$ ومنه الدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=4$

تمرين19: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=\frac{|x|}{x}+x^4$

1.أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)$

2.هل الدالة f تقبل نهاية عند $x_0=0$ ؟

أجوبة :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{x}{x}+x^4,x>0\\ f(x)=\frac{-x}{x}+x^4,x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=1+x^4,x>0\\ f(x)=-1+x^4,x<0\end{cases}$$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}1+x^4=1$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}-1+x^4=-1$

2) نلاحظ أن: $\lim_{x\to4^+}f(x)\neq\lim_{x\to4^-}f(x)$

ومنه لدالة f لاتقبل نهاية عند : $x_0=0$

تمرين20: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}$ 2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac{2x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\times\frac12=1\times\frac12=\frac12$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{6x}{\tan3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{6x}\times\frac{3x}{\tan3x}\times2=1\times1\times2=2$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin4x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}\times\frac{4x}{\sin4x}\times\frac{2x}{4x}=1\times1\times\frac12=\frac12$

تمرين21: أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}$ 3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times3=1\times3=3$

2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=1\times1=1$

3) $\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan10x}{10x}\times\frac{5x}{\sin5x}\times\frac{10x}{5x}=1\times1\times2=2$

تمرين22: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin x\le1$

اذن : $2x-1\le\sin x+2x\le1+2x$ اذن : $2x-1\le\sin x+2x$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}2x-1=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}2x+\sin(x)=+\infty$

تمرين23: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to-\infty}-4x^2+\cos x$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\cos x\le1$

اذن : $-4x^2-1\le-4x^2+\cos x\le1-4x^2$ اذن : $-4x^2+\cos x\le1-4x^2$

ونعلم أن : $\lim_{x\to+\infty}1-4x^2=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}-4x^2+\cos x=-\infty$

تمرين24: أحسب النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac1x\right)$

الجواب: نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin\left(\frac1x\right)\le1$

اذن : $-x^2\le x^2\sin\left(\frac1x\right)\le x^2$ ولدينا : $\lim_{x\to0}x^2=0$ و $\lim_{x\to0}-x^2=0$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac1x\right)=0$

تمرين25: أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}$

أجوبة: 1) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\cos x\le1$ اذن: $-1\le-\cos x\le1$

اذن: $1\le2-\cos x\le3$ اذن: $\frac13\le\frac{1}{2-\cos x}\le\frac11$ اذن: $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\cos x}\le\frac{x}{1}$

اذن : $\frac{x}{3}\le\frac{x}{2-\cos x}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}=+\infty$

2) نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad -1\le\sin x\le1$ اذن: $-1\le-\sin x\le1$

اذن : $2\le3-\sin x\le4$ اذن: $\frac14\le\frac{1}{3-\sin x}\le\frac12$

اذن : $\frac{x^3}{4}\le\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$ اذن :

$\frac{x^3}{3-\sin x}\le\frac{x^3}{2}$ ونعلم أن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2}=-\infty$ ومنه : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-\sin x}=-\infty$

تمرين26: أحسب النهايات التالية: 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ 3) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

أجوبة : 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x$ لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+3}-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2x=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-2\right)=+\infty\times(-1)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

3) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}3x=+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=+\infty$

3) ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}3x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالتعميل ب x^2 داخل الجذر مربع:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x$ لدينا : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to-\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x+4}+3x=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+3x=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-3\right)=+\infty\times(-2)=-\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+x=+\infty$

دائما نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{1}{2}$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب x^2 داخل الجذر مربع وب x في البسط ونجد :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

لأن : $\sqrt{x^2}=|x|$ وبما أن $x\to+\infty$: فان $\sqrt{x^2}=|x|=x$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}}=1$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

تمرين27: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}, & x\geq -1 \\ f(x)=\dfrac{x^2-3}{x}, & x<-1 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$

2. هل الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$ ؟

أجوبة : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$ لدينا $\lim\limits_{x\to-1^+}x^2+4x+3=0$ و $\lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن : -1 جذرللحدودية x^2+4x+3

اذن : هي تقبل القسمة على: $x+1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن : $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}x+3=2$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-3}{x}=\frac{1-3}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

2) نعم الدالة f تقبل نهاية عند : $x_0=-1$

لأن : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$

تمارين للبحث:

تمرين1: أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3+2x^2+1}{x^4+3x-1}$

(3 $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}$ (4 $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-2x+1}{x^2-x-2}$

(5 $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{1-\sqrt{x+4}}{x+3}$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x} ; x\geq 0 \\ f(x)=x^3 ; x<0 \end{cases}$$

1. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$
2. استنتج : $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

تمرين3: أحسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty} x-\sqrt{x^2-x}$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-x}$ (4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x-1}-2x+1$

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5x^2+x-1}+2x+1$ (6 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x-1}+x$

تمرين4: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-\dfrac{1}{8} ; x>\dfrac{1}{2} \\ f(x)=1-2x ; x\leq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron »
dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien