تمارين حو النهايات

تمارين و حلولها

تمرين

حدد النهايات التالية

$\lim_{x\to 2} 3+x-3x^2$ و $\lim_{x\to-\infty} -2x^4+3x^3+x-1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}$ و $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$ و $\lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$ و $\lim_{x\to2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$

و $\lim_{x\to2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ و $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ و $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x$ و

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$ و $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin x}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2}$ و $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}$

و $\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}$

الجواب

نحدد النهايات

* $\lim_{x\to 2} 3+x-3x^2=-7$ $\quad$ $\lim_{x\to-\infty} -2x^4+3x^3+x-1=\lim_{x\to-\infty} -2x^4=-\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+3x^3+x}{-5x^5+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{-5x^5}=-\frac{2}{5}$

* $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4+x^2+1}{-x^8-2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^4}{-x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{x^4}=0$

* $\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{2x-3}{x+3}=-\frac{1}{4}$

* نحدد $\lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-	0	+	

$\lim_{x\to1^+} x^2-3x+2=0^-$ $\quad$ $\lim_{x\to1^+}-2x+1=-1$ ومنه $\lim_{x\to1^+}\frac{-2x+1}{x^2-3x+2}=+\infty$

* لدينا $\lim_{x\to 2} x^2-x-2=0$ و $\lim_{x\to 2} -2x+1=-3$

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
x^2-x-2	+ 0 - 0 +

ومنه $\lim_{x\to 2^+} x^2-x-2=0^+$ و $\lim_{x\to 2^-} x^2-x-2=0^-$

إذن $\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}=+\infty$; $\lim_{x\to 2^+}\frac{-2x+1}{x^2-x-2}=-\infty$

* $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=1$$

* لدينا $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

ومنه $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$$

و حيث x تؤول إلى $-\infty$ فان x سالبة ومنه $|x|=-x$

إذن $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}=-\frac{1}{2}$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

و حيث x تؤول إلى $+\infty$ فان x موجبة ومنه $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-2\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1$$

* $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=2$$

* لدينا $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\frac{\sin 5x}{5x}\times 5$

نعلم أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

و حيث $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1$ فان $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=1\times 1\times 5=5$

* لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan^2 x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan^2 x+2}=0$

* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

نعلم أن $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ومنه $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$

لدينا $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1=2$ إذن $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

* $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x\cdot\sin x}{2\sin 2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}-\tan x=0$

* لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{(1+\sin x)\cos x}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=$ π

لدينا $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}1+\sin x=2$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\cos x=0^-$ لأن $\cos x\prec 0$ $\forall x\in\left]-\pi;\frac{\pi}{2}\right[$

ومنه $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=-\infty$

تمرين2

بين أن $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

الجواب

لدينا $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ ومنه $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

و حيث أن $\lim_{x\to 0}|x|=0$ فان $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

تمرين3

نعتبر g دالتين عددية للمتغير حقيقي x حيث $g(x)=\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$

1- حدد $\lim_{x\to 0}g(x)$

3- بين أن $|g(x)|\le\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$ و استنتج $\lim_{x\to+\infty}g(x)$

الجواب

-1 نحدد $\lim_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1}$$

لدينا $\lim_{x\to 0} 2-\cos x = 1$ ومنه $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2-\cos x}+1} = \frac{1}{2}$

وحيث $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ فان $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

-2 نبين أن $|g(x)| \le \frac{1}{x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le 2-\cos x \le 3 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{2-\cos x}-1 \le \sqrt{3}-1 \prec 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |g(x)| = \left|\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}\right| = \frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2}$$

لدينا $0 \le \sqrt{2-\cos x}-1 \prec 1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ و منه $0 \le \frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{x^2} \prec \frac{1}{x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

إذن $|g(x)| \le \frac{1}{x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

نستنتج $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

لدينا $|g(x)| \le \frac{1}{x^2}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ و منه $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$