مذكرة رقم3 في درس المرجح

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
ـ قبل تعريف المرجح يستحسن التحسيس بالارتباط الموجود بين مفهوم المرجح في الرياضيات ومفاهيم أخرى من بعض مواد التخصص؛ ـ ينبغي إبراز الدور الذي يلعبه المرجح في حل بعض المسائل الهندسية.	ـ استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛ ـ إنشاء مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ ـ استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛ ـ استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛ ـ استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.	ـ مرجح n نقطة $(2 \le n \le 4)$؛ مركز الثقل؛ ـ الخاصية المميزة للمرجح؛ الصمود؛ التجميعية؛ ـ إحداثيا المرجح في معلم معلوم.

I. مرجح نقطتين متزنتين

نشاط1 : لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

1) بين أنه توجد نقطة G بحيث : $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (E)

2) أنشئ النقطة G

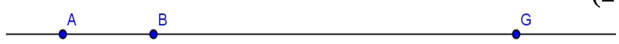
الأجوبة : 1)نلاحظ أن : $4+(-5)\neq 0$

$4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $4\overrightarrow{GA}-5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $4\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

اذن توجد نقطة وحيدة G على المستقيم (AB) تحقق (E)

(2



نشاط2 : لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى

هل توجد نقطة G بحيث : $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

الجواب : نلاحظ أن : $2-2=0$

$2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{GA}-2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ (استعمال علاقة شال)

يعني $2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و هذا غير ممكن

اذن لا توجد نقطة G تحقق (E)

1.1. نقطة متزنة

لتكن A نقطة من المستوى و a عددا حقيقيا

الزوج $(A;a)$ يسمى نقطة متزنة و العدد a يسمى وزن النقطة A

(نقول كذلك أن النقطة A معينة بالمعامل a).

1.2. خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

ملاحظة1: اذا كانت $a+b=0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ ليس لهما مرجح

ملاحظة2: اذا كانت النقطة G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ ① (استعمال علاقة شال) و هذه الكتابة تستعمل لرسم النقطة G

تمرين1:

1.أنشئ G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$

2.أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

الأجوبة: 1)لدينا G مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(B;3)$ باستعمال العلاقة ① نجد :

$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{(-2)+3}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}$ ②

ولدينا G' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;1)$ وباستعمال العلاقة ① نجد

$\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ③

2)اذن : $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG'}=-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG'}=-3\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-3+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB}=-\frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

1.3. خاصيات مرجح نقطتين متزنتين

نشاط أو تمرين2: أنشئ G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0,003)$ و $(B;-0,001)$ حيث $A\neq B$

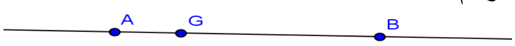
الجواب: G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-0,003)$ و $(B;-0,001)$

يعني $-0,003\overrightarrow{GA}-0,001\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ نضرب طرفي المتساوية في نفس العدد : $k=1000$

يعني $-\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;-3)$ و $(B;-1)$

وباستعمال العلاقة ① نجد : $\overrightarrow{AG}=\frac{-1}{(-1)+(-3)}\overrightarrow{AB}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه

الرسم:



1.3.1. الصمود

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم:

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان لكل k من $\mathbb{R}^*$,

G هو كذلك مرجح النقطتين المتزنتين $(A;ka)$ و $(B;kb)$

تمرين3: ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\sqrt{8})$ و $(B;-\sqrt{2})$

بين أن G مرجح النقطتين : $(A;-2)$ و $(B;1)$

الجواب: حسب خاصية الصمود نضرب وزني النقطتين في نفس العدد الحقيقي و المرجح لا يتغير نأخذ : $k=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ اذن : G مرجح النقطتين :

$\left(A;-\sqrt{8}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $\left(B;-\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ أي : $(A;-2)$ و $(B;1)$ نلاحظ أن : $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

1.3.2. الخاصية المميزة

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى بحيث $a+b\neq 0$
ولتكن G نقطة من المستوى
G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ إذا وفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

البرهان : لتكن M نقطة من المستوى

$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=a\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+b\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$ (استعمال علاقة شال)

$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}+a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}$

G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ يعني $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

يعني $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

استنتاج: بوضع : $M=A$ (على التوالي $M=B$) في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$
(على التوالي $\overrightarrow{BG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{BA}$) وهذه الكتابات تمكننا من رسم النقطة G
وتبين لنا أن : A و B و G نقط مستقيمية.

تمرين4: ليكن E و F نقطتين من المستوى بحيث: $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ و $E\notin(AB)$.

1) بين أن : G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$
2) استنتج أن المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان محددا نقطة تقاطعهما.

الأجوبة:

1) $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ يعني $\overrightarrow{EG}=2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$ (استعمال علاقة شال)
يعني $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}$ يعني $\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{GF}$
يعني $-1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$
يعني $\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ يعني G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$

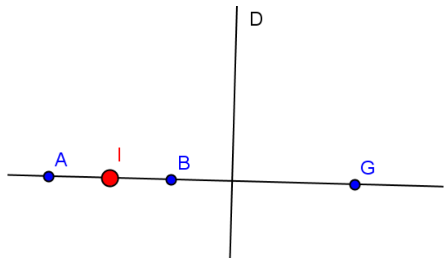
2) لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $G\in(AB)$
و لدينا G مرجح النقطتين المتزنتين $(E;-1)$ و $(F;2)$ اذن : $G\in(EF)$
اذن المستقيمين (AB) و (EF) لديهم نقطة مشتركة وغير منطبقين (لأن : $E\notin(AB)$)
وبالتالي : المستقيمين (EF) و (AB) يتقاطعان و G هي نقطة تقاطعهما.

تمرين5: لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى.
ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$
حدد مجموعة النقط G من المستوى P بحيث :
$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

الجواب: $\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

G مرجح النقطتين $(A;3)$ و $(B;-5)$ اذن حسب الخاصية المميزة للمرجح فان :
$3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=(3+(-5))\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}$
و لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$ وبما أن : I منتصف القطعة $[AB]$
فان : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

$|-2|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=|2|\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$ يعني $\left\|-2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|$ يعني
$\left\|3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$
يعني $2MG=2MI$ يعني $MG=MI$
ومنه مجموعة النقط هي واسط القطعة $[GI]$



II. إحداثيتي المرجح:

المستوى منسوب إلى معلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ نقطتين متزنتين من المستوى
إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ فان إحداثيتي G هما :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$$

ملاحظة : I منتصف القطعة $[AB]$ يعني I مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;1)$

مثال: نعتبر النقطتين : $A(1;2)$ و $B(-4;6)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;-1)$
أحسب إحداثيتي G

الجواب:
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times1+(-1)\times(-4)}{2+(-1)}=\dfrac{6}{1}=6 \\ y_G=\dfrac{2\times2+(-1)\times6}{2+(-1)}=\dfrac{-2}{1}=-2 \end{cases}$$
اذن : $G(6;-2)$

تمرين6: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين : $A(-2;5)$ و $B(2;1)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;3)$

1) أحسب إحداثيتي G
2) حدد إحداثيتي النقطة H بحيث G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$
3) بين أن : المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان.

الأجوبة: 1)
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times(-2)+3\times2}{3+1}=\dfrac{4}{4}=1 \\ y_G=\dfrac{1\times5+3\times1}{3+1}=\dfrac{8}{4}=2 \end{cases}$$
اذن : $G(1;2)$

2) طريقة1: G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني :
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{1\times x_H+3\times x_O}{3+1}=1 \\ y_G=\dfrac{1\times y_H+3\times y_O}{3+1}=2 \end{cases}$$
لدينا $O(0;0)$ يعني : $\begin{cases} \dfrac{x_H}{4}=1 \\ \dfrac{y_H}{4}=2 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} x_H=4 \\ y_H=8 \end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

طريقة2: G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;1)$ و $(O;3)$ يعني : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$

و $\overrightarrow{OG}(1;2)$ و $\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}\left(\frac{1}{4}x_H;\frac{1}{4}y_H\right)$

يعني $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OH}$ يعني $\begin{cases}\frac{x_H}{4}=1\\ \frac{y_H}{4}=2\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}x_H=4\\ y_H=8\end{cases}$ اذن : $H(4;8)$

3) $\overrightarrow{AH}(6;2)$ و $\overrightarrow{OB}(6;2)$ اذن : نلاحظ أن : $\overrightarrow{AH}=3\overrightarrow{OB}$

ومنه المستقيمين (AH) و (OB) متوازيان لأن المتجهتين : $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{OB}$ مستقيميتان

تمرين7: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقطتين: $A(0;5)$ و $B(3;2)$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;1)$ و $(B;2)$

1) أحسب إحداثيتي G

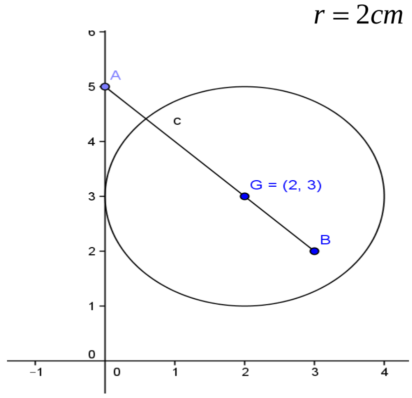
2) حدد و أرسم مجموعة النقط M من المستوى P بحيث : $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6$

الأجوبة: 1) $\begin{cases}x_G=\frac{0+6}{3}=2\\ y_G=\frac{5+4}{3}=3\end{cases}$ اذن : $G(2;3)$

2) $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=6cm$ يعني $\|3\overrightarrow{MG}\|=6cm$ حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|3|\|\overrightarrow{MG}\|=6cm$ يعني $3MG=6cm$ يعني $MG=2cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=2cm$



III. مرجح ثلاث نقط متزنة:

1.1. خاصية و تعريف

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$.

حالة خاصة: إذا كان : $a=b=c$ فان مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ يسمى كذلك مركز ثقل المثلث ABC

1.2. خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة

أ) الصمود: إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ فان لكل k من $\mathbb{R}^*$ G هي كذلك مرجح النقط المتزنة $(A;ka)$ و $(B;kb)$ و $(C;kc)$

ب) الخاصية المميزة: لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ ولتكن G نقطة من المستوى

G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ إذاوفقط إذا لكل نقطة M من المستوى : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$

استنتاج: بوضع : $M=A$ في الخاصية المميزة نحصل على : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ ® و هذه العلاقة تمكننا من رسم النقطة G

مثال أو تمرين8: ليكن ABC مثلثا و G نقطة بحيث : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$

بين أن : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

و أنشئ النقطة G

الجواب: $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$ يعني $2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

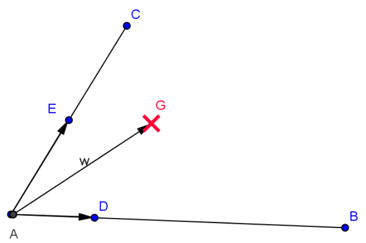
يعني $2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ يعني $-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه : G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$

وحسب العلاقة ® فان : $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

أي : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ومنه رسم G



تمرين9: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى. و G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;1)$

حدد المجموعة: $E=\{M\in P/\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6cm\}$

حيث P هو المستوى.

الجواب : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6cm$ يعني $\|2\overrightarrow{MG}\|=6cm$ حسب الخاصية المميزة للمرجح

يعني $|2|\|\overrightarrow{MG}\|=6cm$ يعني $2MG=6cm$ يعني $MG=3cm$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=3cm$

ج) تجميعية المرجح:

لتكن $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ ثلاث نقط من المستوى بحيث $a+b+c\neq0$ و $a+b\neq0$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و $(C;c)$ وكانت H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$

فان G مرجح $(H;a+b)$ و $(C;c)$

تمرين10: ليكن G مركز ثقل المثلث ABC و I منتصف القطعة $[BC]$

بين أن G مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(I;2)$

الجواب : G مركز ثقل المثلث ABC يعني G مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

I منتصف القطعة $[BC]$ يعني : I مرجح النقطتين $(B;1)$ و $(C;1)$

وحسب خاصية تجميعية المرجح فان : G هو مرجح النقطتين : $(A;1)$ و $(I;1+1)$

تمرين11: لتكن A و B و C و D ثلاث نقط من المستوى. حدد مجموعة النقط من المستوى بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-5\overrightarrow{MD}\right\|=5cm$$

1.3. إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;a)$ و $(B;b)$ و$(C;c)$ فان إحداثيتي G هما :
$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

تمرين12: في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط : $A(-1;1)$ و $B(0;2)$ و $C(1;-1)$ و $D(1;0)$

1) حدد إحداثيتي K مرجح النقطتين المتزنتين $(A;2)$ و $(B;3)$

2) حدد إحداثيتي L مركز ثقل المثلث ABC

3) حدد إحداثيتي G مرجح النقط : $(A;2)$ و $(B;3)$ و $(C;1)$ و $(D;-1)$

الأجوبة : 1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5} \end{cases}$ اذن : $K\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

2) L مركز ثقل المثلث ABC يعني L مرجح النقط المتزنة $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

ومنه : $\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times0+1\times1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times1+1\times2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$ اذن : $L\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

3) $\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d} \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$ اذن : $G\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

تمرين13: لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى.

و M من المستوى P بحيث : $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1) بين أن $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2) لتكن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$ بين أن :
$\vec{V}=2\overrightarrow{KA}$

3) لكن: G مرجح النقط المتزنة $(A;2)$ و $(B;-1)$ و $(C;-3)$

أ)بين أن : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{GM}$ لكل نقطة M من المستوى

ب)استنتج مجموعة النقط M من المستوى بحيث :
$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$$

الأجوبة : 1) $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

ومنه $\vec{V}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ ومنه $\vec{V}$ متجهة غير مرتبطة بالنقطة M

2) وجدنا : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ مهما تكن M من المستوى

يمكننا مثلا وضع : $M=K$ ونجد : $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

ونعلم أن : K مرجح النقطتين المتزنتين $(B;1)$ و $(C;-3)$ اذن :
$\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

ومنه نجد : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ أي : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3)أ) حسب الخاصية المميزة للمرجح :
$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$$

3)ب) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$ تعني $\left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\|$

تعني $2GM=2KA$ تعني $GM=KA$

ومنه مجموعة النقط هي الدائرة (C) التي مركزها G وشعاعها $r=KA$

تمرين14: ليكن ABC مثلثا و B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و $(C;1)$ ثم A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ و C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$

1) بين أن : $\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AA'}=3\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC'}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2) بين أن : $\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$

3) استنتج أنه مهما تكن M نقطة من المستوى فان :
$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

4) استنتج أن النقط A' و B' و C' مستقيمية.

الأجوبة: 1) B' مرجح النقطتين $(A;-2)$ و$(C;1)$

اذن : $\overrightarrow{AB'}=\dfrac{1}{1+(-2)}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}$

A' مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(B;-3)$ اذن : $\overrightarrow{AA'}=\dfrac{-3}{-3+2}\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}$

C' مرجح النقطتين $(C;-1)$ و $(B;3)$ يعني $\overrightarrow{BC'}=\dfrac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(2

$$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{AA'}+2\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BC'}\right)=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AB'}+2\overrightarrow{BC'}-2\overrightarrow{BA'}$$
$$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-2\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}\right)$$
$$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$$

3) $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{MA'}-\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B'}\right)+2\left(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

$$-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{B'A'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$$

4)وجدنا أن : مهما تكن M نقطة من المستوى

فان : $-\overrightarrow{MA'}-\overrightarrow{MB'}+2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$

بوضع مثلا : $M=A'$

نجد : $-\overrightarrow{A'A'}-\overrightarrow{A'B'}+2\overrightarrow{A'C'}=\vec{0}$ يعني $2\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}$

وهذا يعني أن : النقط A' و B' و C' مستقيمية.

تمرين15:

1) ليكن I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ و J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ و K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$

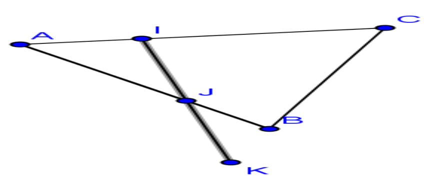
أنشئ النقط I و J و K

2) أثبت أن B مرجح النقطتين $(K;3)$ و $(C;1)$

3) بين أن J منتصف $[KI]$

الأجوبة : 1) I مرجح النقطتين $(A;2)$ و $(C;1)$ اذن : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

J مرجح النقطتين $(A;1)$ و $(B;2)$ اذن : $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



K مرجح النقطتين $(C;1)$ و $(B;-4)$ اذن : $\overrightarrow{BK}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2)يكفي أن نبين أن : $3\overrightarrow{BK}+1\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ ؟؟؟؟؟

بما أن لدينا : $\overrightarrow{BK}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ يعني $3\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{BC}$

يعني $3\overline{BK}+\overline{BC}=\vec{0}$

3)يكفي أن نبين أن : $\overline{JK}=\overline{IJ}$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\overline{AI}=\frac{1}{3}\overline{AC}$ و $\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

اذن : $\overline{IJ}=\overline{AJ}-\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{1}{3}\left(2\overline{AB}-\overline{AC}\right)$ ❶

لدينا : $\overline{JK}=\overline{JA}+\overline{AB}+\overline{BK}=\frac{2}{3}\overline{AB}+\overline{AB}-\frac{1}{3}\overline{BC}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{CB}\right)$

❷ $\overline{JK}=\frac{1}{3}\left(\overline{AB}+\overline{CA}+\overline{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overline{AB}-\overline{AC}\right)$

من : ❶ و ❷ نجد أن : $\overline{IJ}=\overline{JK}$ ومنه : J منتصف $[KI]$

ملاحظات عامة حول درس المرجع: