السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المرجح حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $ABCD$ رباعي محدب . E و F هما على التوالي مركزا ثقلي المثلثين ABC و ADC

لدينا E مركز ثقل المثلث ABC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$(*)\ \forall M \in (P)\ \overrightarrow{ME} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

لدينا F مركز ثقل المثلث ADC أي مرجح النقط $(A,1)$ و $(D,1)$ و $(C,1)$

إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح:

$$(*)\ \forall M \in (P)\ \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$$

نأخذ في المتساوية $(*)$: $M = E$ فنجد أن: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}\right)$

وبما أن E مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ فإن : $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ أي : $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DE}$

منه: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

بالتالي : $(EF) // (BD)$

الشكل غير ضروري لكنه يساعد في إيجال الفكرة أحيانا.

تمرين 2 : ABC مثلث. E و I و F نقط حيث $\overrightarrow{AE} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ و I منتصف $[BC]$ و $\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$

1

لدينا $\overrightarrow{AE} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$ منه : $5\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ منه : $5\overrightarrow{AE} + 2\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = \vec{0}$

منه : $5\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ منه : $7\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ منه: $-7\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(A,-7)$ و $(B,2)$

لدينا I منتصف $[BC]$ إذن I مرجح النقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

لدينا $\overrightarrow{CF} = \frac{7}{9}\overrightarrow{CA}$ منه $9\overrightarrow{CF} = 7\overrightarrow{CA}$ منه : $9\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ منه : $9\overrightarrow{CF} - 7\left(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FA}\right) = \vec{0}$

منه : $9\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}$ منه : $2\overrightarrow{CF} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}$ منه: $-2\overrightarrow{FC} - 7\overrightarrow{FA} = \vec{0}$

هذا يعني أن E مرجح النقطتين $(C,-2)$ و $(A,-7)$ (أو أيضا $(C,2)$ و $(A,7)$ خاصية الصمود)

2

لدينا E مرجح $(A,-7)$ و $(B,2)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P)\ \overrightarrow{ME} = \frac{-7}{-5}\overrightarrow{MA} + \frac{2}{-5}\overrightarrow{MB}$

لدينا F مرجح $(C,2)$ و $(A,7)$ إذن حسب الخاصية المميزة للمرجح: $\forall M \in (P)\ \overrightarrow{MF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{MC} + \frac{7}{9}\overrightarrow{MA}$

نأخذ: $M = I$ فنجد أن: $\overrightarrow{IE} = \frac{7}{5}\overrightarrow{IA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{9}\overrightarrow{IC} + \frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

ولدينا I منتصف $[BC]$ منه : $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$ منه : $\overrightarrow{IF} = \frac{-2}{9}\overrightarrow{IB} + \frac{7}{9}\overrightarrow{IA}$

إذن : $9\overrightarrow{IF} = -2\overrightarrow{IB} + 7\overrightarrow{IA}$ و $5\overrightarrow{IE} = 7\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB}$ منه : $9\overrightarrow{IF} = 5\overrightarrow{IE}$ أي $\overrightarrow{IF} = \frac{5}{9}\overrightarrow{IE}$

بالتالي: النقط E و I و F مستقيمية.

تمرين 3 : $A(3,4)$ و $B(0,2)$ و $C(3,2)$. E منتصف $[BC]$ و G مرجح النقطتين $(E,2)$ و $(A,1)$

1

لدينا E منتصف $[BC]$ منه : $\begin{cases} x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$ منه: $E\left(\frac{3}{2} ; 2\right)$

لدينا: G مرجح $(E,2)$ و $(A,1)$ منه : $\begin{cases} x_G = \dfrac{2x_E + x_A}{3} = \dfrac{3+3}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{2y_E + y_A}{3} = \dfrac{4+4}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$ منه: $G\left(2\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$

2 لدينا: $\overrightarrow{OE}\left(\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$ و $\overrightarrow{OG}\left(2\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$ ولدينا : $\det\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OE}\right)=\begin{vmatrix} 2 & \frac{8}{3} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - \dfrac{8}{3}\times\dfrac{3}{2} = 4-4=0$

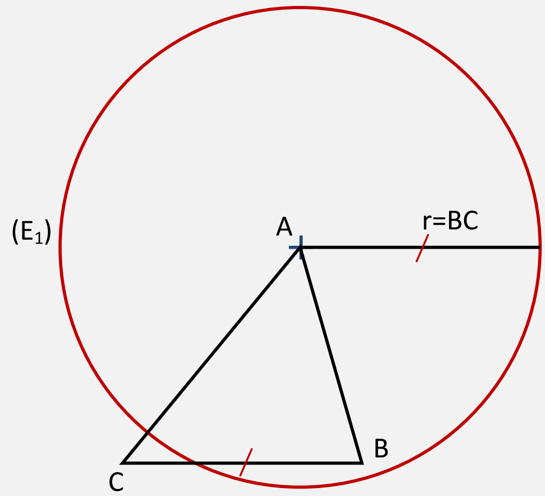
بالتالي : O و G و C مستقيمية.

تذكير: إحداثيتا مرجح (A,α) و (B,β) و ... و (K,λ) هي : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha\, x_A + \beta\, x_B + \ldots + \lambda\, x_K}{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \\ y_G = \dfrac{\alpha\, y_A + \beta\, y_B + \ldots + \lambda\, y_K}{\alpha+\beta+\ldots+\lambda} \end{cases}$

تمرين 4 : ABC مثلث.

1 لنحدد (E_1) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$

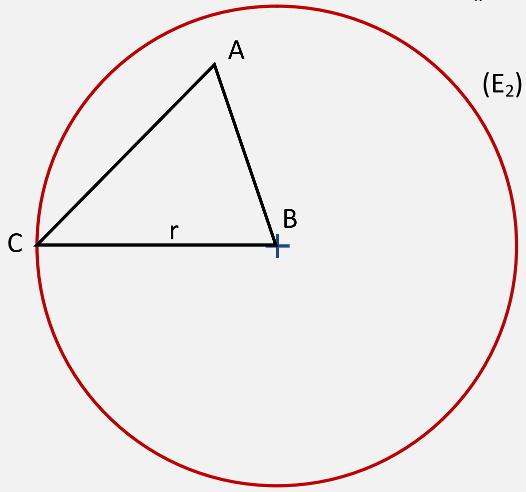
لدينا : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ تعني : $AM = BC$ إذن المجموعة (E_1) هي الدائرة التي مركزها A و شعاعها $R = BC$



2 لنحدد (E_2) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ منه : $\left\|\overrightarrow{BM}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ أي : $BM = BC$

بالتالي المجموعة (E_2) هي الدائرة التي مركزها B و شعاعها $R = BC$

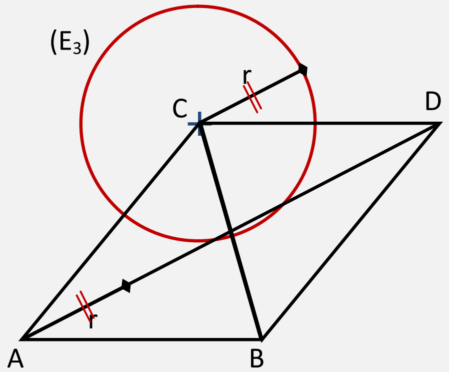


3 لنحدد (E_3) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|4\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|$

نعتبر النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (أي $ABDC$ متوازي أضلاع)

منه : $\left\|4\overrightarrow{CM}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ أي : $4CM = AD$ أي : $CM = \dfrac{AD}{4}$

بالتالي المجموعة (E_3) هي الدائرة التي مركزها C و شعاعها $R = \dfrac{AD}{4}$



تمرين 5 : ABC مثلث ، $AB = 6$ ، $AC = 4$ ، $BC = 5$. G مركز ثقل المثلث ABC .

1	لنحدد (ζ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 6$ نعتبر النقطة G مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي مركز ثقل المثلث ABC) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ منه : $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6$ أي $3MG = 6$ أي $MG = 2$ بالتالي (ζ) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = 2$
2	لنحدد (Δ) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ نعتبر النقطة I مرجح النقط $(A,1)$ و $(B,1)$ (أي منتصف $[AB]$) و النقطة J مرجح النقط $(B,1)$ و $(C,1)$ (أي منتصف $[BC]$) لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ و $\forall M \in (P)\ 2\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ منه : $\left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $2MI = 2MJ$ أي $MI = MJ$ بالتالي (Δ) هو واسط القطعة $[IJ]$
3	لنحدد (L) مجموعة النقط M التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ نعتبر النقطة G مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(B,3)$ لدينا حسب الخاصية المميزة للمرجح $\forall M \in (P)\ 4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ منه : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}\right\|$ أي $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ أي $MG = \dfrac{BC}{2}$ بالتالي (L) هي الدائرة التي مركزها G و شعاعها $r = \dfrac{BC}{2}$

- لم يتم رسم الأشكال نظرا لكوننا تطرقنا لها في التمرين السابق.
- لا حظ أننا استعمل المرجح لكي يتم تبسيط المجموع المتجهي داخل رمز المنظم، لكن و في حال كان مجموع المعاملات منعدما (كما هو الحال في المثال الأخير فإنه يكون ممكنا تبسيط هذا التعبير دون استعمال المرجح)