

المرجح القدرات المنتظرة

- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
- إنشاء مرجح n نقطة ($2 \leq n \leq 4$)؛
- استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
- استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
- استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

1- مرجح نقطتين

1- النقطة المترزة

تعريف

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا الزوج $(A; \alpha)$ يسمى نقطة مترزة. نقول كذلك النقطة A معينة بالمعامل α . أو العدد α وزن النقطة A .

2- مرجح نقطتين

أنشطة

- (I) لتكن A و B نقطتين مختلفتين
- 1- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
 - 2- بين أنه توجد نقطة وحيدة G حيث $2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
- (II) لتكن A و B نقطتين مختلفتين و α و β عددين حقيقيين غير منعدمين
- 1- بين إذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$
 - 2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة G حيث $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$

مبرهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ نقطتين مترزتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح النقطتين المترزتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المترزتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ لا تقبلان مرجحا.

3- مركز ثقل نقطتين

تعريف

مركز ثقل نقطتين A و B هو مرجح A و B المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل نقطتين A و B هو منتصف $[AB]$

4- الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

G مرجح النقطتين المترزتين $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $\alpha + \beta \neq 0$ $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $k\alpha + k\beta \neq 0$ $k\alpha\vec{GA} + k\beta\vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow$
 $G \Leftrightarrow$ مرجح النقطتين المترزتين $(A; k\alpha)$ و $(B; k\beta)$

خاصة

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد α و β حيث G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ في الحالتين

$$أ- \quad 2\vec{GA} - 3\vec{GB} = 5\vec{AB}$$

ب- A مركز ثقل G و B .

5- الخاصة المميزة

نشاط

ليكن α و β عددين حقيقيين حيث $\alpha + \beta \neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تكافئ $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG}$ $\forall M \in (P)$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overline{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overline{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{OB}$$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

ج/ حدد إحداثيتي G' مرجح $(A; -5)$ و $(B; 2)$ حيث $A(-2; 3)$ و $B(1; 4)$

مراجعة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG}$$

نتيجة

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان

$$\overline{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overline{AB}$$

تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إذا و فقط إذا كان

$$\overline{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overline{BA}$$

ملاحظة

مرجح نقطتين مختلفتين A و B تنتمي إلى المستقيم (AB)

6- احداثيا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ و $G(x_G; y_G)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{cases} \quad \text{إذا كان } G \text{ مرجح } (A; \alpha) \text{ و } (B; \beta) \text{ فان}$$

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 3)$ ثم أنشئ G' مرجح $(A; 2)$ و $(B; 1)$

أحسب $\overline{GG'}$ بدلالة \overline{AB}

تمرين

أنشئ I مرجح $(A; 2)$ و $(C; 1)$ ثم J مرجح $(A; 1)$ و $(B; 2)$ و K مرجح $(C; 1)$ و $(B; -4)$

1- أثبت أن B مرجح $(C; 1)$ و $(K; 3)$

2- بين أن J منتصف $[KI]$.

تمرين

لتكن $A \neq B$

1- حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = 0$

2- حدد مجموعة النقط M حيث $\|3\overline{MA} + 2\overline{MB}\| = \|2\overline{MA} + 3\overline{MB}\|$

تمرين: حدد إحداثيتي G مرجح $(A; -2)$ و $(B; 6)$ حيث $A(-1; 2)$ و $B(-4; 3)$

II- مرجح ثلاث نقط

1- أنشطة

نشاط 1

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى

$$1- \text{ أنشئ } G \text{ حيث } \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$2- \text{ هل يمكن إنشاء } G \text{ حيث } \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

نشاط
لتكن A و B و C نقط مختلفة و α و β و λ أعداد حقيقية

$$*) \text{ نحدد } G \text{ حيث } \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

الجواب

$$\text{لدينا } (*) \text{ تكافئ } (\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$$

$$*) \text{ إذا كان } \alpha + \beta + \lambda \neq 0 \text{ فإن } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{(\alpha + \beta + \lambda)}\overrightarrow{AC}$$

ومنه توجد نقطة وحيدة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$*) \text{ إذا كان } \alpha + \beta + \lambda = 0 \text{ فإن } \beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ فإنه لا توجد نقطة G حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ فإن جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$.

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

النقطة G تسمى مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda = 0$ فإن النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ لا تقبل مرجحا

3- مركز ثقل ثلاث نقط

تعريف

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل ثلاث نقط A و B و C هو مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 1)$

خاصة

متوسطات مثلث ABC تتلاقى في نقطة وحيدة G هي مركز ثقل المثلث ABC

$$\text{و تحقق } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

إذا كان A' و B' و C' منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فإن $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} \text{ و } \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

4- خاصة

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

5- الخاصية المميزة

نشاط

α و β و λ أعداد حقيقية حيث $\alpha + \beta + \lambda \neq 0$

1- بين أن G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ تكافئ $(\alpha + \beta + \lambda)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC}$

2- ننسب المستوى (P) إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OB} + \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \lambda}\overrightarrow{OC}$$

ب/ استنتج إحداثيتي G علما أن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$

مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ و λ أعداد حقيقية حيث α و β و λ تكون G مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overline{MG}$

6- إحداثيات مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ و $C(x_C; y_C)$ و

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \lambda x_C}{\alpha + \beta + \lambda} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \lambda y_C}{\alpha + \beta + \lambda} \end{cases} \text{ فان } (C; \lambda) \text{ و } (B; \beta) \text{ و } (A; \alpha) \text{ مرجح } G(x_G; y_G) \text{ إذا كان } G$$

7- خاصية التجميعية

$\alpha + \beta + \lambda \neq 0$ و λ أعداد حقيقية حيث α و β و λ مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ ومنه $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} = (\alpha + \beta + \lambda) \overline{MG}$ * لو كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ تقبل مرجحا G_1 ومنه $\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} = (\alpha + \beta) \overline{MG_1}$ وبالتالي $(\alpha + \beta) \overline{MG_1} + \lambda \overline{MC} = ((\alpha + \beta) + \lambda) \overline{MG}$ إذن G مرجح $(G_1; \alpha + \beta)$ و $(C; \lambda)$ * بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_2; \alpha + \lambda)$ و $(B; \beta)$ حيث G_2 مرجح $(A; \alpha)$ و $(C; \lambda)$ * بنفس الطريقة نبين أن G مرجح $(G_3; \beta + \lambda)$ و $(A; \alpha)$ حيث G_3 مرجح $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$

خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 1)$ و $(C; 2)$
أنشئ G' مرجح $(A; -3)$ و $(B; 2)$ و $(C; -1)$

تمرين

ABC مثلث و G مرجح $(A; 1)$ و $(B; 4)$ و $(C; -2)$ و D نقطة حيث $\overline{AD} = \frac{4}{5} \overline{AB}$

أنشئ الشكل
بين أن D و C و G مستقيمة

تمرين

ABC مثلث. حدد مجموعة النقط M حيث $\|2\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\| = \|-2\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}\|$

III- مرجح أربع نقط

1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ و $(D; \mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث

$$\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$$

توجد نقطة وحيدة G من المستوى حيث $\alpha \overline{GA} + \beta \overline{GB} + \lambda \overline{GC} + \mu \overline{GD} = \vec{0}$
النقطة G تسمى مرجح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ و $(D; \mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha + \beta + \lambda + \mu = 0$ فان النقط المتزنة $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ و $(C; \lambda)$ و $(D; \mu)$ لا تقبل مرجحا

2- مركز ثقل أربع نقط

تعريف

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح A و B و C و D المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

خاصة

مركز ثقل أربع نقط A و B و C و D هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

3- خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

4- الخاصة المميزة

مبرهنة

$\alpha + \beta + \lambda + \mu \neq 0$ حيث μ و λ و β و α تكون G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل M من المستوى

$$\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \lambda \overline{MC} + \mu \overline{MD} = (\alpha + \beta + \lambda + \mu) \overline{MG}$$

5- خاصة التجميعية

خاصة

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحها معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتهما.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع
أنشئ G مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$
بين أن $G \in (AC)$