المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$U: I\to\mathbb{R}$

$n\to u(n)$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n\in I)\ U_n\le M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n\in I)\ U_n\ge m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n\in I): m\le u_n\le M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k\ge 0$ بحيث $(\forall n\in I): |U_n|\le k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\le U_{n+1}$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\langle U_{n+1}$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\ge U_{n+1}$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n\rangle U_{n+1}$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in\mathbb{N})\ U_n=U_{n+1}$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p\langle n\Rightarrow u_p\le u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p\langle n\Rightarrow u_p\ge u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1}-u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1}-u_n\ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1}-u_n\rangle 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1}-u_n\le 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1}-u_n\langle 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1}-u_n=0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n\in\mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1}=U_n+r}$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1}-u_n$ ونجد $u_{n+1}-u_n=cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a+c=2b$ يعني $\frac{a+b}{2}=b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{U_n=U_0+nr}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو: $U_n=U_1+(n-1)r$.

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو: $U_n=U_2+(n-2)r$.

3) بصفة عامة: إذا كان U_n و U_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n=U_p+(n-p)r}$

(ترتيب n و p غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S=u_0+u_1+u_2+...+u_n=(n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) $u_1+u_2+....+u_n=n\frac{u_1+u_n}{2}$.

2) $u_0+u_1+....+u_{n-1}=n\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$.

3) بصفة عامة

$$\boxed{u_p+u_{p+1}+....+u_n=(n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}}.$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $(\forall n\in\mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1}=q.U_n}$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1}=q\cdot u_n$.

c) تكون الأعداد a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac=b^2$.

2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_p وu_n حدين من متتالية هندسية

أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0 : الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$