

سلسلة 4	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
<p>تمرين 1: $u_0 = 1, v_0 = 2$; $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$; $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$; $w_n = v_n - u_n$ ، و $t_n = 3u_n + 10v_n$</p>		
<p>لدينا : $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15} w_n$</p> <p>إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ وحدها الأول $w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1$</p> <p>بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$</p>		
<p>لدينا : $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n$</p> <p>إذن (t_n) متتالية ثابتة ، منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23$</p>		
<p>لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10v_n = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10w_n + 10u_n = t_n \end{cases}$</p> <p>$\begin{cases} v_n = \frac{t_n + 3w_n}{13} = \frac{23 + 3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} = \frac{23 - 10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n = w_n + \frac{t_n - 10w_n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}$</p>		
<p>⚡ لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل أنظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n واعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.</p>		
<p>تمرين 2: (u_n) متتالية حسابية ، u_0</p>		
<p>نعلم أن : $u_6 = u_0 + 6r$ و $u_3 + u_4 + u_5 = u_0 + 3r + u_0 + 4r + u_0 + 5r = 3u_0 + 12r$</p> <p>لدينا : $u_6 = -7$ و $u_3 + u_4 + u_5 = -9$</p> <p>إذن نحصل على النظام : $\begin{cases} u_0 + 6r = -7 \\ 3u_0 + 12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ 3(-7 - 6r) + 12r = -9 \end{cases}$</p> <p>منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -21 - 18r + 12r = -9 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -6r = -9 + 21 = 12 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} u_0 = -7 + 12 = 5 \\ r = \frac{12}{-6} = -2 \end{cases}$</p>		
<p>$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{u_0 + u_{100}}{2} \times 101 = 101 \frac{5 + u_0 + 100r}{2} = 101 \frac{5 + 5 - 200}{2} = 101 \times \frac{-190}{2}$</p> <p>$S = 101 \times (-95) = -9595$</p>		
<p>تمرين 3: (v_n) متتالية هندسية ، $v_0 = 3$ ، $r = 2$</p>		

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 3 \frac{1-2^n}{-1} = 3(2^n - 1)$$

1

$$w_n = v_n^2$$

أ) لدينا متتالية هندسية أساسها $r = 2$ منه: $v_{n+1} = 2v_n$
منه: $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2v_n)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$ $q = 4$ متتالية هندسية أساسها $q = 4$

2

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = w_0 \frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2 \frac{1-4^n}{1-4} = 9 \frac{1-4^n}{-3} = 9 \frac{4^n - 1}{3} = 3(4^n - 1)$$

ب)

تمرين 4: $u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1}$; $u_0 = 2$

$$u_2 = \frac{u_1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{u_0}{0+1} = 2$$

1

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$
نفترض أن $u_n > 0$

لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\frac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$

2

بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n \left(\frac{1}{3n+1} - 1 \right) = u_n \frac{1-3n-1}{3n+1} = -\frac{3nu_n}{3n+1} \leq 0$$

3

بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

$$\frac{1}{4} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \frac{3n-3}{4(3n+1)} = \frac{3(n-1)}{4(3n+1)}$$

أ)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4} \quad \text{و منه} \quad \frac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0 \quad \text{لدينا} \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ لكل}$$

$$\text{لدينا حسب السؤال السابق: } \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \dots \quad \text{و} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$$

4

$$\frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن:}$$

$$\text{أي: } \frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{منه: } u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_0 \quad \text{منه: } u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2 \quad \text{منه: } u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 8$$

ب)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 8 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

بالتالي:

تمرين 5: $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$; $u_0 = 0$

بالنسبة لـ $n = 0$ ، لدينا : $|u_0| = 0$ منه $|u_0| < \frac{1}{2}$

1

نفترض أن $|u_n| < \frac{1}{2}$ ونبين أن $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}$

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_{n+1} < -\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow |u_{n+1}| < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < \frac{1}{2}} \quad \text{بالتالي :}$$

$$u_n^2 - \frac{1}{4} < 0 \quad \text{أي} \quad u_n^2 < \frac{1}{4} \quad \text{فإن} \quad |u_n| < \frac{1}{2} \quad \text{وبما أن} \quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$$

لدينا : $u_n^2 - \frac{1}{4} < 0$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.

2

$$\text{بالنسبة لـ } n=0 \text{ ، لدينا : } \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^0} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^1 = u_0 + \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}} \quad \text{نفترض أن} \quad u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n} \quad \text{ونبين أن:}$$

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$$

لدينا :

3

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}} \quad \text{بالتالي :}$$