الدوران

I- تعريف الدوران

1- تعريف

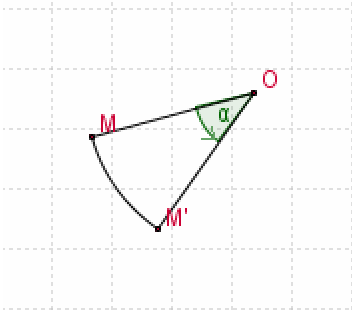
لتكن O نقطة من المستوى الموجه P و α عددا حقيقيا الدوران الذي مركزه O و زاويته α هو التطبيق من P نحو P الذي يربط كل نقطة M بنقطة M' بحيث:

- $M'=O$ اذا كانت $M=O$
- $\begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ اذا كان $M\neq O$

*- نرمز للدوران الذي مركزه O و زاويته α بالرمز $r(O;\alpha)$ أو بالرمز r

*- النقطة M' تسمى صورة M بالدوران r نكتب $r(M)=M'$

نقول كذلك أن الدوران r يحول M إلى M'

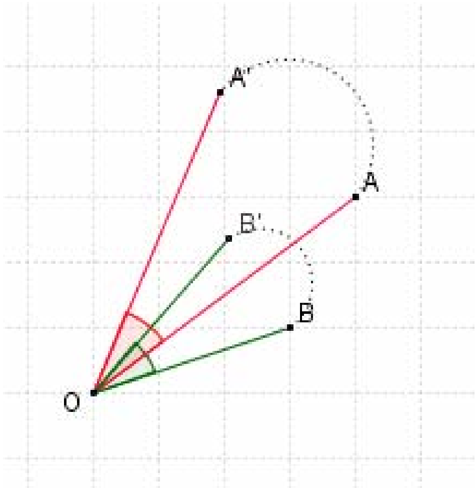


مثال

لتكن O و A وB ثلاث نقط و r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$

أنشئ A' وB' صورتي A وB على التوالي بالدوران r

الجواب



2 – استنتاجات

أ) المثلث المتساوي الساقين

- ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A يعني أن الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ يحول B إلى C
- إذا كان ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى C
- إذا كان ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ فان الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ يحول B إلى C

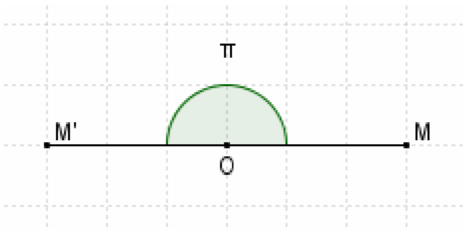
ب) الدوران الذى زاويته منعدمة

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

- إذا كان $\alpha\equiv0 \quad [2\pi]$ فان $r(M)=M$ في هذه الحالة r هو التطبيق المتطابق في المستوى جميع نقط المستوى صامدة
- إذا كان $\alpha\not\equiv0 \quad [2\pi]$ فان النقطة الوحيد الصامدة بالدوران r هي مركزه O

ج) الدوران الذي زاويته مستقيمة

$r(O;\pi)=S_O$ حيث S_O التماثل المركزي الذي مركزه O



3- الدوران العكسي

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM=OM' \\ \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)\equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM'=OM \\ \left(\overrightarrow{OM'};\overrightarrow{OM}\right)\equiv -\alpha \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$r(M)=M' \Leftrightarrow r'(M')=M \,/\quad r'=r(O;-\alpha)$$

الدوران $r(O;-\alpha)$ يسم الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بالرمز r^{-1}

$$\begin{cases} r^{-1}(M')=M \\ r^{-1}(O)=O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(M)=M' \\ r(O)=O \end{cases}$$

الدوران r تطبيق تقابلي في المستوى

خاصية

كل دوران $r(O;\alpha)$ هو تطبيق تقابلي في المستوى
الدوران $r(O;-\alpha)$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(O;\alpha)$ نرمز له بـ: r^{-1}

تمارين تطبيقية

1- ليكن $ABCD$ مربعا

حدد زاويتي الدورانيين r_1 و r_2 الذي مركزاهما A و C على التوالي ويحولان معا النقطة D إلى B

2- ليكن ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

أ- حدد مركز الدوران r الذي يحول B إلى C

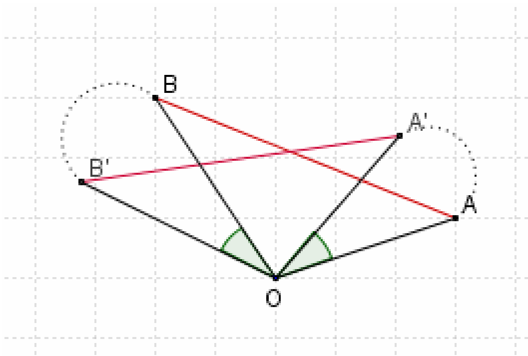
ب- حدد الدوران العكسي للدوران r

II- خاصات الدوران

1- خاصة أساسية (الحفاظ على المسافة)

ليكن $r(O;\alpha)$ دورانا و A و B نقطتين

$r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$



لنقارن $AB=A'B'$

حسب علاقة الكاشي في المثلثين OAB و $OA'B'$ لدينا:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$$

$$AB'^2=OA'^2+OB'^2-2OA'\cdot OB'.\cos\left[\widehat{A'OB'}\right]$$

و بما أن $r(A)=A' \quad ; \quad r(B)=B'$ فان: $\begin{cases} OA=OA' \\ \left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)\equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} OB=OB' \\ \left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right)\equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases}$

و لدينا من جهة أخرى

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)+\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OB}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\alpha+\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}\right)\quad[2\pi]$$

ومنه $\left[\widehat{AOB}\right]=\left[\widehat{A'OB'}\right]$

و بالتالي $A'B'^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB.\cos\left[\widehat{AOB}\right]$

ومنه $A'B'^2=AB^2$ اذن $A'B'=AB$

خاصية

ليكن r دورانا و A وB نقطتين من المستوى إذا كان $r(A)=A'$; $r(B)=B'$ فان $A'B'=AB$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على المسافة

تمرين

ليكن ABC مثلثا . نعتبر M و N نقطتين خارج المثلث بحيث MAB و NAC مثلثان متساويا الأضلاع

قارن MC و NB

III- الدوران و استقامة النقط

أ) صورة قطعة

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r

لتكن M نقطة من $[AB]$ و M' صرتها بالدوران r

1- بين أن $M'\in[A'B']$

2- بين اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

الجواب

لدينا A' وB' وM' صور A و B و M بدوران r ومنه $MA=M'A'$ و $MB=M'B'$ و $AB=A'B'$

1- $M\in[AB]$ تكافئ $MA+MB=AB$

تكافئ $M'A'+M'B'=A'B'$

تكافئ $M'\in[A'B']$

2- ليكن $\lambda\in[0;1]$ و $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

ومنه $M\in[AB]$ و $\dfrac{AM}{AB}=\lambda$

و بالتالي $M'\in[A'B']$ و $\dfrac{A'M'}{A'B'}=\lambda$

إذن $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن $[AB]$ قطعة و A' وB' صورتي A و B بدوران r صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي القطعة $[A'B']$ اذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $0\le\lambda\le1$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ب- صورة مستقيم

لتكن A' وB' صورتي النقطتين المختلفتين A و B بدوران r

أ- بين أن $r([AB])=[A'B')$

ب- بين أن $r((AB))=(A'B')$

خاصية

لتكن A' وB' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بدوران r
- صورة نصف المستقيم $[AB)$ هو نصف المستقيم $[A'B')$
- صورة المستقيم (AB) هو المستقيم $(A'B')$
- إذا كان $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ فان $\overrightarrow{A'M'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ حيث $r(M)=M'$

ج- المرجح و الدوران

A' و B' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي و G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

بين أن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

الجواب

G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ومنه $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

و حيث الدوران يحافظ على معامل استقامية فان $\overrightarrow{A'G'}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$

إذن G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

خاصية

A' وB' و G' صورالنقط A و B و G بدوران r على التوالي

اذا كان G مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان G' مرجح $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

الدوران يحافظ على مرجح نقطتين

ملاحظة: الخاصية تبقى صحيحة لمرجح أكثر من نقطتين

نتيجة

A' وB' و I' صور النقط A و B و I بدوران r على التوالي

إذا كان I منتصف $[AB]$ فان I' منتصف $[A'B']$

الدوران يحافظ على المنتصف

د) الحفاظ على معامل الاستقامية

A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$

حيث $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

لنبين أن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

لنعتبر النقطة E حيث $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ و E' صورة E بالدوران r

و منه $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$ و بالتالي $\overrightarrow{A'E'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$ لان المرجح يحافظ على معامل استقامية النقط

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}$ تكافئ $[AD]$ و $[AE]$ لهما نفس المنتصف

و حيث أن الدوران يحافظ على المنتصف فان $[A'D']$ و $[A'E']$ لهما نفس المنتصف

ومنه $\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{A'E'}$

اذن $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

خاصية

لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r على التوالي و $\lambda\in\mathbb{R}$

إذا كان $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$ فان $\overrightarrow{C'D'}=\lambda\overrightarrow{A'B'}$

نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على معامل استقامية متجهتين

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا

ننشئ خارجه المثلث CBF المتساوي الأضلاع و داخله المثلث ABE متساوي الأضلاع

نعتبر الدورن $r=r\left(B;\dfrac{\pi}{3}\right)$ و G نقطة حيث $r(G)=D$

بين أن النقط D و E و F مستقيمية

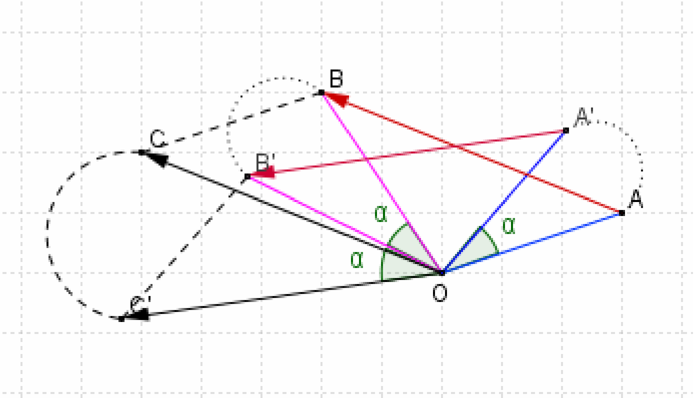
3- الدوران و الزوايا

أ) خاصية أساسية

لتكن A' وB' صورتي A و B بدوران r زاويته α على التوالي .

لتكن C نقطة حيث $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$

لتكن $r(C)=C'$ ومنه $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{A'B'}$



و بالتالي $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\quad[2\pi]$

وحيث أن $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$ فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

خاصية

> ليكن r دورانا زاويته α
>
> إذا كان A' وB' صورتي A و B بالدوران r فان $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\alpha\quad[2\pi]$

ب- نتيجة

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}\right)+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)+\left(\overrightarrow{C'D'};\overrightarrow{CD}\right)\quad[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\alpha+\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)-\alpha\quad[2\pi]$$

إذن $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$

> لتكن A' وB' و C' و D' صور أربع نقط A و B و C و D بدوران r حيث $A\neq B$ و $C\neq D$
>
> $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}\right)\quad[2\pi]$ نعبر عن هذا بقولنا الدوران يحافظ على قيا س الزوايا

تمرين

ليكن ABC مثلثا متساوي الساقين رأسه A و (C) دائرة محيطة به . نعتبر M نقطة من القوس $\left[\overset{\frown}{AB}\right]$ الذي لا يحتوي على C . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.

بين أن M و M' و C نقط مستقيمية حيث $r(M)=M'$

4- صورة دائرة بدوران

خاصية

> صورة دائرة $C(\Omega;R)$ بدوران r هي دائرة $C(\Omega';R)$ حيث $r(\Omega)=\Omega'$

تمرين

ليكن $ABCD$ مربعا و (C) دائرة مارة من A و C . لتكن Q و R نقطتا تقاطع (C) مع (BC) و (CD) على التوالي

بين أن $BQ=DR$ (يمكن اعتبار الدوران r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$)

تمرين1

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين في A حيث $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

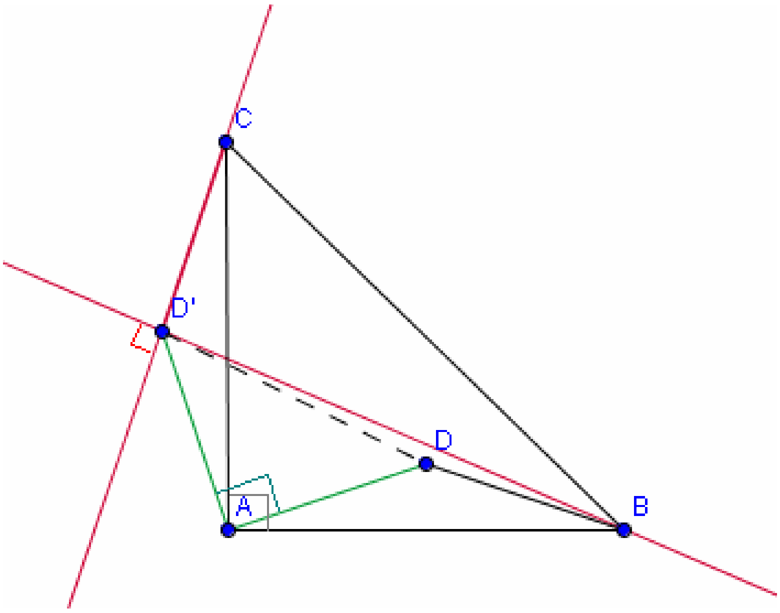
وD نقطة داخل المثلث ABC . ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

1- أنشئ D' صورة D بالدوران r

2- بين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

الحل

1- ننشئ D' صورة D بالدوران r



2- نبين أن $BD=CD'$; $(BD)\perp(CD')$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ و ABC مثلث متساوي الساقين في A و منه $r(B)=C$

و حيث $r(D)=D'$ فان $BD=CD'$ لأن الدوران يحافظ على المسافة

لدينا $r(B)=C$ و $r(D)=D'$ و زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ و منه $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CD'}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن $(BD)\perp(CD')$

تمرين2

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم لزاوية في B حيث $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$ زاوية

غير مباشرة. لتكن O منتصف $[AC]$ و E و F نقطتين حيث $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

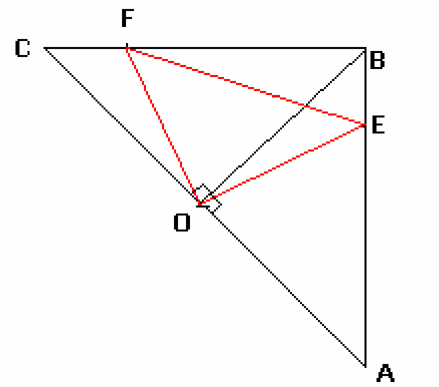
1- أنشئ الشكل

2- حدد صورتي A و B بالدوران r

3- نضع $r(E)=E'$ بين أن $E'=F$ استنتج طبيعة المثلث OEF

الحل

1- الشكل



2- نحدد صورتي A و B بالدوران r

لدينا ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B و O منتصف $[AC]$ ومنه $(OB)\perp(AC)$

و $OA=OB=OC$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OA=OB$ و منه $r(A)=B$

لدينا $[2\pi]$ $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ و $OC=OB$ و منه $r(B)=C$

1- نبين أن $E'=F$ نستنتج طبيعة المثلث OEF

$r(E)=E'$ و $r(A)=B$ و $r(B)=C$ و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{BE'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

وحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BE'}$ إذن $E'=F$

ومنه $r(E)=F$ و حيث r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ فان OEF مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تمرين3

في مستوى موجه نعتبر ABC مثلثا قائم الزاوية في A و $[2\rho]$ $\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\alpha$ و r الدوران الذي مركزه B و زاويته α

1- أنشئ E و F حيث $r(C)=F$; $r(A)=E$

2- بين أن $(EF)\perp(BC)$

3- لتكن $(AC)\cap(EF)=\{I\}$ و $r(I)=J$ و $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

أ- بين أن النقط E و F و J مستقيمية

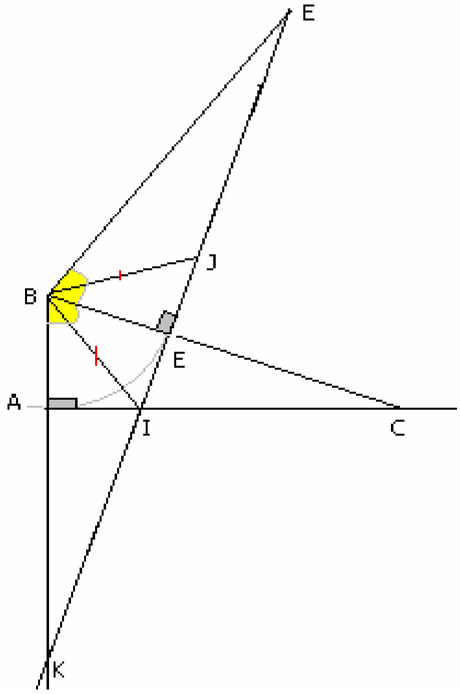
ب- بين أن E منتصف $[Ij]$

4- لتكن $(AB)\cap(IJ)=\{K\}$.

بين أن $r(K)=C$

الحل

1- ننشئ E و F حيث $r(C)=F$; $r(A)=E$



-2 بين أن $(EF)\perp(BC)$

بما أن $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(B)=B$ فان $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})$

وحيث أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ فان $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB})\equiv\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ ومنه $(EF)\perp(EB)$

لدينا $r(B)=B$ و $r(A)=E$ ومنه $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE})\quad[2\pi]$ و بالتالي $(BC)=(BE)$

إذن $(EF)\perp(BC)$

-3 أ- نبين أن النقط E و F و J مستقيمية

لدينا I و C و A مستقيمية و $r(C)=F$; $r(A)=E$ و $r(I)=J$

ومنه النقط J و E و F مستقيمية

ب- نبين أن E منتصف $[IJ]$

لدينا $r(I)=J$ و منه BIJ مثلث متساوي الساقين في الرأس B

وحيث أن $(IJ)\perp(EB)$ لأن $(IJ)=(EF)$ ومنه (EB) ارتفاع في المثلث BIJ

و بالتالي (EB) متوسط للمثلث BIJ إذن E منتصف $[IJ]$

-4 نبين أن $r(K)=C$

$(AB)\cap(IJ)=\{K\}$

لدينا $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BF})\equiv\alpha\equiv(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\quad[2\pi]$ ومنه (BC) منصف $(\widehat{KBF})$ وحيث أن $(EF)\perp(BC)$

فان المثلث KBF مثلث متساوي الساقين في الرأس B ومنه $BF=BK$

وحيث أن $r(C)=F$ فان $BC=BF$ و بالتالي $BC=BK$

إذن لدينا $(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})\equiv\alpha\quad[2\pi]$ و $BC=BK$ ومنه $r(K)=C$