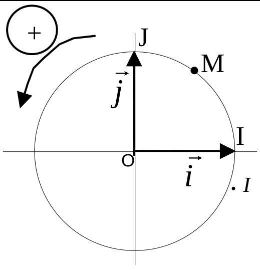
الحساب المثلثي

I- الأفاصيل المنحنية



1) *) ليكن $(o,\vec{i},\vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

*)نختار المنحى المعاكس لعقربي الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

*) الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I .

2) لتكن M نقطة من U . للحصول على أفصول منحني لـــ M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M .

*) إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M .

3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).

وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

4) يكون العددان αوβ أفصولين منحنين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha=\beta-2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة: 1)

$$\alpha\equiv\beta[2\pi]\Leftrightarrow\alpha=\beta+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha-\beta=2k\pi$$

$\Leftrightarrow$ (αوβ أفصولين منحنين لنفس النقطة)

2) *) $\alpha\equiv\alpha+2n\pi\ \ [2\pi]$

*) $\alpha\equiv\beta\ [2\pi]\Leftrightarrow\alpha\equiv\beta+2n\pi\ \ [2\pi]$

5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi\langle\alpha_0\langle\pi$. α_0 يسمى الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة M

(ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M).

6) نعتبر الأعداد $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

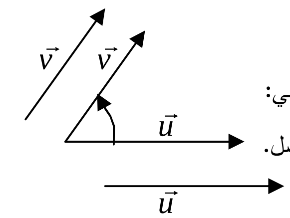
عدد النقط التي أفاصيلها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابعة. عادة نعوض k بالقيم $0,1,2,....,(n-1)$

وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II- قياس الزوايا الموجهة

1) لتكن $\vec{u},\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين.

من أجل تحديد قياسات الزاوية الموجهة $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نتبع ما يلي:



*) نزيح المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إلى نفس الأصل.

*) المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما

(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

$\longleftarrow$) إذا التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب

$(\overline{\vec{u},\vec{v}})=\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv\alpha[2\pi]$.

$\longleftarrow$) إذا كان التحرك من $\vec{u}$ نحو $\vec{v}$ داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ هو قياس لهذه الزاوية.

ونكتب $(\overline{\vec{u},\vec{v}})=-\alpha+2k\pi$ أو $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-\alpha[2\pi]$.

2) خاصيات.

a) من بين قياسات $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi\langle\alpha_0\leq\pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

b) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})+(\overline{\vec{w},\vec{v}})\ \ [2\ \ ]$ (علاقة شال).

c) $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\vec{v},\vec{u})\ \ [2\pi]$.

d) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv0[2\pi]$

e) إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u},\vec{v})\equiv\pi[2\pi]$

f) يكون αوβ قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha-\beta=2k\pi$ يعني $\alpha\equiv\beta[2\pi]$.

ملاحظة:

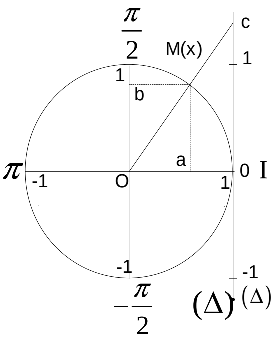
1) تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملاهما متوازيين.

2) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\rangle0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

3) المتجهتين $\vec{u}$ و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha\langle0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III- الدوال المثلثية

1)تعريف



لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

*) ليكن x من $\mathbb{R}$ و M النقطة التي أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول ل M و b

ارتوب M يعني $M(a,b)$.

c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ)

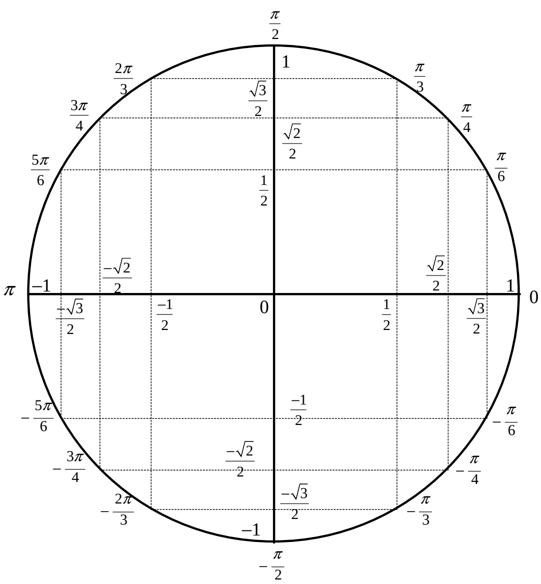
لدينا

$$\cos x=a \qquad \sin x=b \qquad \tan x=c$$

2) خاصيات

(a

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$ يعني $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

c) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad$ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

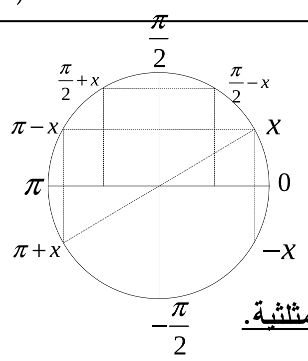
d) $\cos(x+2k\pi)=\cos x \quad \sin(x+2k\pi)=\sin x \quad \tan(x+k\pi)=\tan x$

e) $\cos(-x)=\cos x \quad \sin(-x)=-\sin x \quad \tan(-x)=-\tan x$

f)
$$\cos(\pi-x)=-\cos x \qquad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x \qquad \sin(\pi+x)=-\sin x$$
$$\tan(\pi-x)=-\tan x \qquad \tan(\pi+x)=\tan x$$

g)
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$$

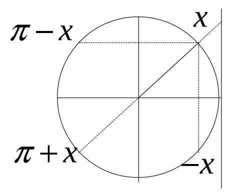
h) $(\forall x\in\mathbb{R}): -1\le\cos x\le 1 \quad ; \quad -1\le\sin x\le 1$



3) المعادلات المثلثية.

a)
$$\cos x=1 \Leftrightarrow x=2k\pi$$
$$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \qquad \cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$$
$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

b)
$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$$
$$\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ x=\pi-\alpha+2k\pi \end{cases}$$



c) $\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$

ملاحظات.

1) إذا كان $\alpha\notin[-1,1]$ فإن المعادلتين $\cos x=a$ و $\sin x=a$ ليس لهما حل.

2) تكون المعادلة $\tan(u(x))=a$ معرفة إذا وفقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \text{ معرفة} \\ u(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$

3)
$$-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha) \qquad -\sin\alpha=\sin(-\alpha) \qquad -\tan\alpha=\tan(-\alpha)$$
$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

4) المتراجحات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

1) نضع $f(x)=a\cos(u(x))+b$ أو $f(x)=a\sin(u(x))+b$

*) إذا كان a و b غيرمتقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$

*) إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة

2) نضع $f(x): a\tan(u(x))+b$ $\quad f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x)=0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

5) صيغ التحويل

a)
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$$

b)
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$
$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

c)
$$\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$
$$\sin a\cos a=\frac{1}{2}\sin(2a)$$

d)
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

e)
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

f) نضع $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$: لدينا .

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

g) من أجل تحويل $f(x)=a\cos x+b\sin x$ نتبع ما يلي:

$$\begin{aligned} f(x)&=a\cos x+b\sin x \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha\right) \\ &=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha) \end{aligned}$$

مع $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$