أكاديمية الجهة الشرقية

# تمارين محلولة:الاشتقاق

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

**تمرين1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=1$

**الجواب :** $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-5}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=1$ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$

**تمرين2:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$ .
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة $f$ عند $x_0=2$ .

**الأجوبة: (1** $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2}x=2$ ومنه $f$ قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

$2=f'(2)$ و هو العدد المشتق عند $x_0=2$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=2x-3\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=f(2)+f'(2)(x-2)$

**تمرين3:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ( **قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند** $x_0=0$ )
2. أحسب $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ ( **قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسارعند** $x_0=0$ )
3. هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة $f$ على اليمين عند $x_0=0$ .
5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$ .
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

**الأجوبة: (1** $\begin{cases}f(x)=x^3+x; x\ge0\\ f(x)=x^3-x; x\le0\end{cases}$ و $f(0)=0^3+|0|=0$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3+x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2+1=1$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $1=f'_d(0)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=0$

(2 $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3-x-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^2-1=-1$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $-1=f'_g(0)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=0$

(3

$f$ قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $f'_d(0)\ne f'_g(0)$

ومنه : $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

(4 معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=0$ .

$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_d): y=x\Leftrightarrow y=0+1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_d(0)(x-0)$

(5 معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$ .

$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$

$(\Delta_g): y=-x\Leftrightarrow y=0-1(x-0)\Leftrightarrow y=f(0)+f'_g(0)(x-0)$

(6 لدينا $f'_d(0)\ne f'_g(0)$ النقطة : $A(0;f(0))$ تسمى نقطة مزواة

**تمرين4:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=|x^2-1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$
2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$
3. هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$ .
5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=1$ .
6. كيف نسمي النقطة $A(1,f(1))$ ؟

**الأجوبة:** $f(x)=|x^2-1|$ ندرس اشارة :

$x^2-1$ : $x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

ومنه : $\begin{cases}f(x)=x^2-1; x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1); x\in[-1;1]\end{cases}$ و $f(1)=|1^2-1|=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

(1 $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x+1=2$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$ و $2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليمين عند $x_0=1$

(2 $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $-2=f'_d(1)$

و هو العدد المشتق على اليسار عند $x_0=1$

(3

$f$ قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$

ولكن : $f'_d(1)\neq f'_g(1)$

ومنه : $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليمين عند $x_0=1$.

$$y=f(x_0)+f'_d(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_d): y=2x-4 \Leftrightarrow y=0+2(x-2) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$$

5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة $f$ على اليسار عند $x_0=0$.

$$y=f(x_0)+f'_g(x_0)(x-x_0)$$

$$(\Delta_g): y=-2x+2 \Leftrightarrow y=0-2(x-1) \Leftrightarrow y=f(1)+f'_g(1)(x-1)$$

6) لدينا $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ النقطة : $A(1;f(1))$ تسمى نقطة مزواة

**تمرين5:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ 2) $f(x)=3x-5$ 3) $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=4x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ 5) $f(x)=\frac{5}{x}$ 6) $f(x)=6\sqrt{x}-4$

7) $f(x)=6x^4-\cos x+3\sin x$ 8) $f(x)=\cos(7x+2)$

9) $f(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)$ 10) $f(x)=3\tan x-1$

11) $f(x)=x\cos x$ 12) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 14) $f(x)=(3x+4)^3$ 15) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

**أجوبة :** 1) $f'(x)=(2)'=0$ 2) $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=\left(4x^3-\frac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\frac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

5) $f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$

6) $f'(x)=(6\sqrt{x}-4)'=6\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{x}$

7)
$$f'(x)=(6x^4-\cos x+3\sin x)'=6\times4x^3+\sin x+3\cos x=24x^3+\sin x+3\cos x$$

8) $f'(x)=\cos(7x+2)'=-7\times\sin(7x+2)$

9) $f'(x)=\frac{4}{5}\sin(5x+4)'=5\frac{4}{5}\times\cos(5x+4)=4\times\cos(5x+4)$

10) $f'(x)=(3\tan x-1)'=3\times(1+\tan^2 x)-0=3\times(1+\tan^2 x)$

11) نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=(x\times\cos x)'=x'\times\cos x+x\times\cos' x=1\times\cos x-x\times\sin x=\cos x-x\sin x$$

12) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

14) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

15) نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**تمرين6:** حدد الدالة المشتقة للدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\cos 2x+3\sin 3x$

9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$ 10) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ 13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 15) $f(x)=(2x-1)^7$

**أجوبة :** 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=(4\sqrt{x}-1)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) $f'(x)=(\cos 2x+3\sin 3x)'=-2\sin 2x+3\times3\cos 3x=-2\sin 2x+9\cos 3x$

9) $f(x)=(3x^2+2)(7x+1)$

نستعمل القاعدة التالية : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left((3x^2+2)\times(7x+1)\right)'=(3x^2+2)'\times(7x+1)+(3x^2+2)\times(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x\times(7x+1)+7(3x^2+2)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

10) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

12) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

13) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

14) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

15) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

**تمرين7:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-5x^2+4x-2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

**الجواب:** $f'(x)=(x^3-5x^2+4x-2)'=3x^2-5\times 2x^1+4-0=3x^2-10x+4$

$f''(x)=(3x^2-10x+4)'=6x-10$ و $f'''(x)=(6x-10)'=6$

**تمرين8:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد $D_f$ 2) أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات $f$

**الجواب:** 1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(x^2+2x-2)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

- اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية
- اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**تمرين9:** حدد مطاريف الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2-6x+1$

**الجواب :** $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=(x^2-6x+1)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'$ تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ مطراف للدالة $f$ وبالضبط قيمة دنيا للدالة $f$

**تمرين10:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي: $f(x)=2x^2+x+1$

1) حدد $D_f$ 2) أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات $f$

5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة $f$ في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة $f$ ان وجدت

8) أرسم $(C_f)$ في معلم متعامد ممنظم

**الأجوبة:** $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=(2x^2+x+1)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4x+1$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

4) جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{7}{8}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيلنحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

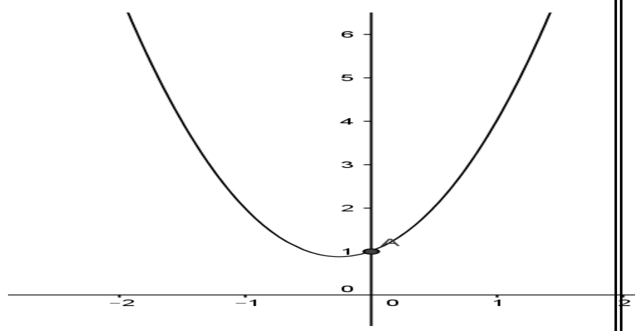
ب) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب نحسب فقط : $f(0)$

1) $f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8) رسم: $C_f$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2- | -1 | -1/4 | 0 | 1 | 2 |
| 7 | 2 | 7/8 | 1 | 4 | 11 |



**تمرين11:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+4x+3$

1) حدد $D_f$ 2) أحسب نهايات $f$ عند محدات $D_f$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات $f$

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة $f$ في النقطة الذي أفصولها $x_0=-1$

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة $f$ ان وجدت

8) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(D)$ الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

9) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ و $(D)$.

10) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq 0$ .

**الأجوبة:** $f(x)=x^2+4x+3$

1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+4x+3=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=(x^2+4x+3)'=2x+4$

$f'(x)=0$ يعني $2x+4=0$ يعني $x=-2$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ $\quad -2 \quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $2x+4$ | $-$ $\quad 0 \quad$ $+$ |

اذا كانت: $x\in[-2;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq 0$ ومنه $f$ تزايدية

اذا كانت: $x\in]-\infty;-2]$ فان : $f'(x)\leq 0$ ومنه $f$ تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow$ | $-1$ | $\nearrow +\infty$ |

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x_0=-1$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=2(x+1) \Leftrightarrow y=2x+2$

لأن : $f(1)=0$ و $f'(1)=2$

6) أ)تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $x^2+4x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=1$ و $b=4$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times3\times1=16-12=4=(2)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4+2}{2\times1}=-1$ و $x_2=\frac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{-4-2}{2\times1}=-3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(-3;0)$

ب)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

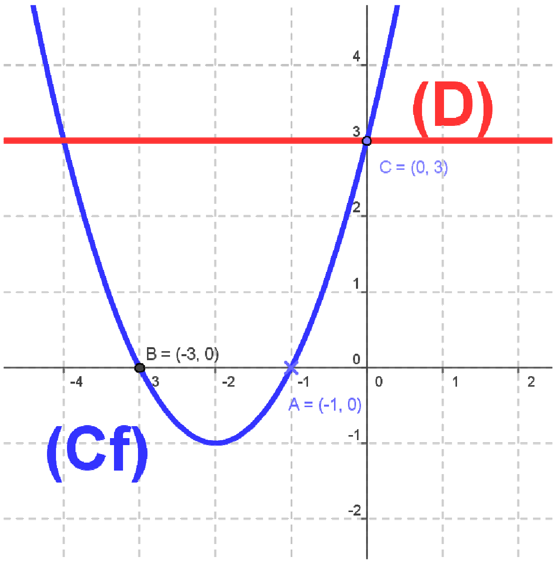
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $-1$

8) رسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ و المستقيم $(D): y=3$

| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 |




9) تحديد نقط تقاطع $(C_f)$ و $(D)$.

نحل المعادلة : $f(x)=y$ يعني $x^2+4x=3$ يعني $x^2+4x+3=3$

يعني $x^2+4x=0$ يعني $x(x+4)=0$ يعني $x=0$ أو $x+4=0$

يعني $x=0$ أو $x=-4$

ومنه نقط التقاطع هم: $E(0;3)$ و $F(-4;3)$

10) $x^2+4x\geq 0 \Leftrightarrow x^2+4x+3\geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\geq y \Leftrightarrow$ منحنى الدالة $(C_f)$ يوجد فوق المستقيم $(D)$

ومنه : $S=[-4;0]$

**تمرين12:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$ .

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2) أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.
6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.
7) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة $f$ في النقطة الذي أفصولها $x_0=2$
8) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**الأجوبة:**

1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2+2x+3=\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2+2x+3=\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left(-x^2+2x+3\right)'=-2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $-2x+2=0$ يعني $x=1$

ندرس اشارة: $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+2$ | $+$ | $0$ | $-$ |

- اذا كانت: $x\in[1;+\infty[$ فان: $f'(x)\le 0$ ومنه $f$ تناقصية
- اذا كانت: $x\in]-\infty;1]$ فان: $f'(x)\ge 0$ ومنه $f$ تزايدية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $4$ | ↘ $-\infty$ |

5)
تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة:

$f(x)=0$ يعني $-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1;0)$ و $B(3;0)$

6) نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط: $f(0)$

$f(0)=3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

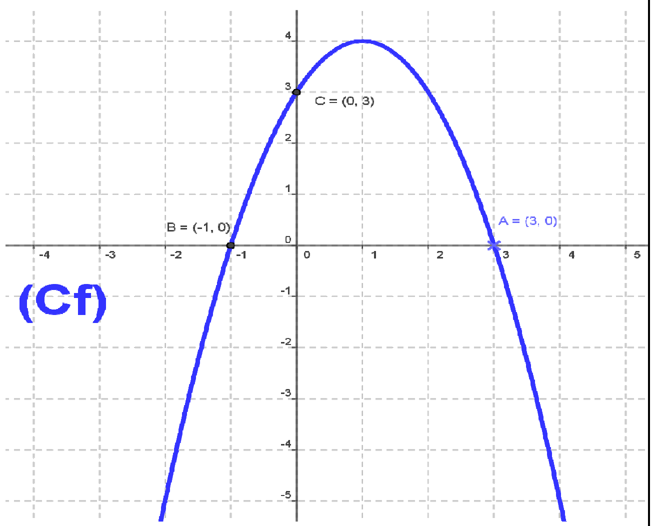
7) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $\quad x_0=2$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=3-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+7$

لأن: $f(2)=3$ و $f'(2)=-2$

8) رسم: $C_f$

| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -5 | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 | -5 |




**تمرين13:** نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين كالتالي:

$\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $g(x)=|x|(x-1)$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين وعلى اليسار عند $x_0=1$
2) هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق ؟
3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند $x_0=0$

**الجواب:** $\begin{cases} f(x)=x^2+2x; x\le 1 \\ f(x)=-\dfrac{2}{x}+5; x>1 \end{cases}$ و $f(1)=1^2+2\times1=3$

(1 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\frac{4}{x}+5-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-\frac{4}{x}+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{-4+2x}{x}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-4+2x}{x}\times\dfrac{1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-4+2x}{x}\times\dfrac{1}{x-1}=-\infty$

ومنه $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن: 1 جذر للحدودية $x^2+2x-3$

اذن : هي تقبل القسمة على: $x-1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{(x+3)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}x+3=4$

ومنه $f$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=1$ و $f'_g(1)=4$

2) $f$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه: $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=1$

3) $g(x)=|x|(x-1)$ و $g(0)=0$ ; $\begin{cases} g(x)=x(x-1); x\ge 0 \\ g(x)=-x(x-1); x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1$$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0=0$ و $f'_d(0)=-1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x(x-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}-x+1=1$$

ومنه $g$ قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0=0$ و $g'_g(0)=-1$

$g$ قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار عند $x_0=0$

ولكن : $g'_d(0)\ne g'_g(0)$

ومنه : $g$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

**تمرين14:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2-2x-3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة $f$

2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة $f$ وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

5) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب.

7) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة $f$ في النقطة الذي أفصولها $x_0=-3$

8) أرسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

**الأجوبة :** 1) الدالة $f$ حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^2-2x-3=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^2-2x-3=\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(2x^2-2x-3\right)'=4x-2$

$f'(x)=0$ يعني $4x-2=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $4x-2$ | $-$ | 0 | $+$ |

اذا كانت: $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ فان : $f'(x)\ge 0$ ومنه $f$ تزايديه

اذا كانت: $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ فان : $f'(x)\le 0$ ومنه $f$ تناقصية

4)نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{7}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5)تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2-2x-3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-2$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times2\times(-3)=4+24=28>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{2+\sqrt{28}}{2\times2}=\frac{2+\sqrt{4\times7}}{2\times2}=\frac{2+2\sqrt{7}}{2\times2}=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};0\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};0\right)$

6)نقط تقاطع $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=-3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;-3)$

7) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $x_0=-3$

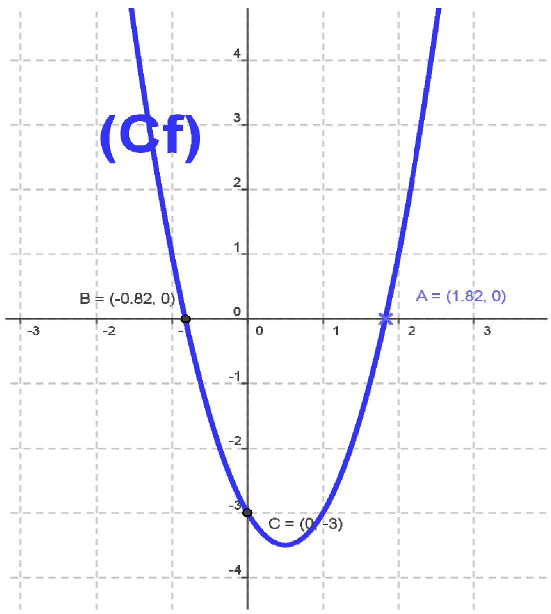
$y=f(-3)+f'(-3)(x+3)$

$y=-14x+21 \Leftrightarrow y=21-14(x+3)$

لأن : $f(-3)=21$ و $f'(-3)=-14$

8)رسم $(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$

| x | -2 | -1 | 0 | 1/2 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 9 | 1 | -3 | -7/2 | -3 | 1 | 9 |




**تمرين15:** حل المعادلة التفاضلية التالية: $y''+16y=0$

**الجواب:** $y''+4^2y=0\Leftrightarrow y''+16y=0$ :

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+16y=0$

هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي :

$y: x\to\alpha\cos4x+\beta\sin4x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

**تمرين16:** حل المعادلات التفاضلية التالية: 1) $y''+4y=0$

2) $y''+8y=0$ 3) $y''+y=0$ 4) $9y''+16y=0$

**الجواب:** 1) $y''+2^2y=0\Leftrightarrow y''+4y=0$ :

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي :

$y: x\to\alpha\cos2x+\beta\sin2x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

2) $y''+\left(2\sqrt{2}\right)^2 y=0 \Leftrightarrow y''+8y=0$ :

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos 2\sqrt{2}x+\beta\sin 2\sqrt{2}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

3) $y''+y=0 \Leftrightarrow y''+1^2 y=0$ :

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+y=0$

هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos 1x+\beta\sin 1x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

4) $y''+\left(\frac{4}{3}\right)^2 y=0 \Leftrightarrow y''+\frac{16}{9}y=0 \Leftrightarrow 9y''+16y=0$ :

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+8y=0$

هو مجموعة الدوال $y$ المعرفة كما يلي : $y:x\to\alpha\cos\frac{4}{3}x+\beta\sin\frac{4}{3}x$

حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

## ملخص لمشتقة بعض الدوال وللعمليات على الدوال المشتقة

| الدالة | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|
| $f(x)=\tan x$ | $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ |
| $f(x)=u+v$ | $f'(x)=u'+v'$ |
| $f(x)=u-v$ | $f'(x)=u'-v'$ |
| $f(x)=k.u$ | $f'(x)=k.u'$ |
| $f(x)=u\times v$ | $f'(x)=u'\times v+u\times v'$ |
| $f(x)=u^n$ | $f'(x)=nu^n\times u'$ |
| $f(x)=\frac{1}{u}$ | $f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$ |
| $f(x)=\frac{u}{v}$ | $f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ |
| $f(x)=\sqrt{u}$ | $f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |

| لدالة | الدالة المشتقة $f'$ |
|---|---|
| $f(x)=k$ | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=x$ | $f'(x)=1$ |
| $f(x)=ax$ | $f'(x)=a$ |
| $f(x)=ax+b$ | $f'(x)=a$ |
| $f(x)=x^n$ | $f'(x)=nx^{n-1}$ $n\in\mathbb{Z}^*$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\sin x$ |
| $f(x)=\sin x$ | $f'(x)=\cos x$ |
| $f(x)=\cos(ax+b)$ | $f'(x)=-a\sin(ax+b)$ |
| $f(x)=\sin(ax+b)$ | $f'(x)=a\cos(ax+b)$ |
| $f(x)=\tan x$ | $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ |

**« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.**
**c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien**