Exercices de logique

Exercice 1 Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer. n est un entier naturel, x et y sont des nombres réels.

1. n premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair ,
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 2 Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des entiers naturels, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec les symboles "$\forall$", "et", "ou", "$\Rightarrow$", "$\Leftrightarrow$") et les prouver.

1. Le produit de deux nombres pairs est-il pair ?
2. Le produit de deux nombres impairs est-il impair ?
3. Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est-il pair ou impair ?
4. Un nombre entier est-il pair si et seulement si son carré est pair ?

Exercice 3 Soient les quatre assertions suivantes :

1. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$,
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$,
3. $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y^2 > x$,
4. $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$.

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 4

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer par l'absurde que, si n n'est pas premier, il admet un diviseur premier p qui est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2. A l'aide de ce critère, déterminer si les nombres 89, 167 et 191 sont premiers.

Exercice 5 Montrer que $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

Exercice 7 * Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $n^3 - n$ est divisible par 6 ,
2. $n^5 - n$ est divisible par 30 ,
3. $n^7 - n$ est divisible par 42 .

Indication : Pour 1, on peut factoriser $n^3 - n$ pour voir que ce nombre est multiple de 2 et de 3. Les cas 2 et 3 peuvent se traiter de façon analogue.

Exercice 8 Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leqslant 2^n \ .$$

Exercice 9 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés :

$$P_n \ : 3 \text{ divise } 4^n - 1 \quad \text{et} \quad Q_n \ : 3 \text{ divise } 4^n + 1 \ .$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n$?