Correction d'exercices de logique

Correction 1 1. n pair, $n \neq 2 \Rightarrow n$ non premier. Démo : si n pair, $n \neq 2$ alors 2 divise n et n n'est pas premier.

2. $x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Démo triviale.
3. $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow x = y$. Démo : si $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ alors en développant $-x+y = x-y$, d'où $2y = 2x$, $x = y$.

Correction 2 1. Oui. n, m pairs $\Rightarrow nm$ pair. Démo : $\exists i, n = 2i$ donc $nm = 2(im)$ est pair.

2. Oui. n, m impairs $\Rightarrow nm$ impair. Démo : $\exists i, j,\ n = 2i+1,\ m = 2j+1$ donc $nm = 2(2ij+i+j)+1$ est impair (ou par contraposée).
3. Pair. (n pair, m impair) $\Rightarrow nm$ pair (cf 1).
4. Oui. n pair $\Leftrightarrow n^2$ pair. Démo : si n pair alors $n^2 = n \times n$ est pair par 1) (sens $\Rightarrow$) ; Si n impair alors n^2 est impair par 2), ce qui donne le sens $\Leftarrow$ par contraposée.

Correction 3 1. Faux. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$ (démo : soit $x \in \mathbb{R}$, on prend $y = -x$).

2. Vrai (démo : $y = -x+1$). Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y \leqslant 0$.
3. Vrai (démo : soit $x = -1$, $\forall y \in \mathbb{R}, y^2 > -1$). Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leqslant x$.
4. Vrai (démo : $\alpha = \sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{+*}$). Négation : $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \alpha$ et $|x^2| \geqslant \varepsilon$.

Correction 4 1. Soit n non premier. Supposons que n n'a pas de diviseur premier $p \leqslant \sqrt{n}$. n non premier $\Rightarrow \exists a, b \geqslant 2$, $n = ab$. Tout nombre $x \geqslant 2$ a un diviseur premier $\leqslant x$. Si $a \leqslant \sqrt{n}$ ou $b \leqslant \sqrt{n}$, cela donne une contradiction. Donc $a > \sqrt{n}$ et $b > \sqrt{n}$, ce qui implique $n > n$, absurde. D'où le résultat.

2. • $\sqrt{89} \simeq 9.4$. 89 n'est pas divisible par $2, 3, 5$ ou 7, donc 89 est premier.
   • $\sqrt{167} \simeq 12.9$. 167 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ donc 167 est premier.
   • $\sqrt{191} \simeq 13.8$. 191 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11, 13$ donc 191 est premier.

Correction 5 Raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{89} = \frac{p}{q}$ avec p, q premiers entre eux. Alors $89q^2 = p^2$. 89 est premier (exo 4) donc 89 divise p : il existe k, $p = 89k$. Donc $q^2 = 89k^2$ et 89 divise q. C'est une contradiction donc $\sqrt{89}$ est irrationnel.

Correction 6 Si $n = 2k$ (pair) alors 4 divise $n^2 = 4k^2$. Si $n = 2k+1$ (impair) alors 4 divise $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$.

Correction 7 $n^3 - n = n(n^2 - 1)$. n pair $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 2. n impair $\Rightarrow n^2 - 1$ pair et $n^3 - n$ multiple de 2.
n multiple de 3 $\Rightarrow n^3 - n$ multiple de 3. $n = 3k+1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$ multiple de 3. $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 - 1 = 3(3k^2 + 4k)$ multiple de 3. Dans les 3 cas, $n^3 - n$ est multiple de 3.
$n^3 - n$ est divisible par 2 et 3 qui sont premiers entre eux donc $n^3 - n$ est divisible par 6.

Correction 8 Initialisation : pour $n = 4$, $4^2 = 16 = 2^4$.
Hérédité : on suppose $n^2 \leqslant 2^n$ avec $n \geqslant 4$. $n > 2$ donc $2n < n \times n$, donc $2n \leqslant n^2 - 1$. D'où $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant n^2 + n^2 \leqslant 2.2^n = 2^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n+1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$, $n^2 \leqslant 2^n$.

Correction 9 1. Si P_n est vraie alors $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$ est un multiple de 3 donc P_{n+1} est vraie. Si Q_n est vraie alors $4^{n+1} + 1 = 4(4^n + 1) - 3$ est un multiple de 3 donc Q_{n+1} est vraie.

2. Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ donc P_0 est vraie. Hérédité : question 1). Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. C'est faux. Preuve par l'absurde : Si Q_{n_0} est vraie alors $(4^{n_0} + 1) + (4^{n_0} - 1) = 4^{n_0}$ est un multiple de 3 à cause de P_{n_0} et Q_{n_0}. Or le seul nombre premier qui divise 4^{n_0} est 2, donc c'est absurde et Q_{n_0} est fausse.