01.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$.

1. ..

a. Montrer que : $\forall n \geq 0 : u_n > \dfrac{3}{2}$.

b. Montrer que : (u_n) est décroissante .

2. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3}$.

a. Montrer que : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2}{3}$.

b. Ecrire v_n en fonction de n , puis on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

c. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{j=0}^{j=n} v_j = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots v_n$.

02.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 0 : 0 < u_n < 1$ puis étudier la monotonie de (u_n) .

2. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{u_n}{a + u_n}$ tel que a est un nombre réel.

a. Déterminer la valeur de a pour que (v_n) est une suite géométrique .

b. On suppose que $a = -1$, Ecrire v_n en fonction de n .

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < u_n < \dfrac{1}{3^n}$.

03.

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : u_n = \dfrac{3u_{n-1}u_{n-2}}{u_{n-2} + 2u_{n-1}} \end{cases}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

1. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique.

2. Ecrire u_n en fonction de n .

04.

On considère les suites numériques $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.

1. Montrer que : la suite (u_n) est une suite constante .

3. ..

- **a.** Montrer que : (v_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques .
- **b.** Ecrire v_n en fonction de n .
- **c.** Déterminer (a_n) et (b_n) en fonction de n .

05.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \text{ et } u_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$.

1. Calculer u_2 et u_3 .

2. Soit les suites numériques $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ tel que : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

- **a.** Montrer que : (v_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques .
- **b.** Montrer que : (w_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques .
- **c.** On déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

3. On pose : pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

- **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2,3\}$; $2n^2 \geq (n+1)^2$.
- **b.** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2,3\}$; $2^n \geq n^2$.

4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < u_n < \frac{2}{n}$.

06.

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5)$ et $v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$.

1. Calculer u_0 et u_1 et v_0 et v_1.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$.

a. Montrer que : la suite (a_n) est géométrique de raison 2.

b. Calculer la somme suivante : $S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - v_n$.

a. Montrer que : la suite (b_n) est arithmétique de raison 2.

b. Calculer la somme suivante : $S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

c. On déduit les sommes : $S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

07.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que : (u_n) est décroissante .

3. Montrer que : $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n$ et on déduit que : $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

08.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2}{1 + u_n} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 3$.

3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{u_n - 1}{2 + u_n}$.

4. Calculer v_0 et v_1.

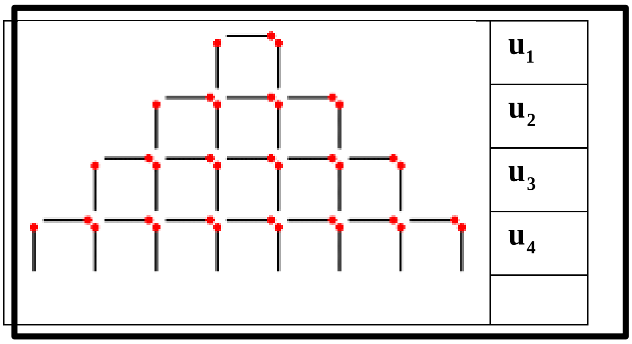
5. ..

a. Montrer que : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Ecrire v_n et u_n en fonction de n puis donner la valeur de u_{10}.

09.

On utilise les allumettes pour construire une coupe dun pyramide (voir figure) .on désigne par u_n le nombre des allumettes nécessaire pour construire l'étage numéros n .



1. Quelle la nature de la suite (u_n).
2. Quel est le nombre des allumettes nécessaire pour construire un pyramide de 100 étages ?

10.

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = -2 \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et v_1.
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$ et $b_n = u_n - 2v_n$.
   a. Montrer que : la suite (a_n) est constante et on détermine le constant.
   b. Montrer que : (b_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques .
   c. Ecrire v_n et u_n en fonction de n puis donner la valeur de u_{10}.

11.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3+2u_n} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.
3. Montrer que : (u_n) est décroissante .
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

12.

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_n = \frac{1}{2}\left(3\times 2^n - 4n + 3\right)$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(3\times 2^n + 4n - 3\right)$

1. Calculer u_0 et u_1 et v_0 et v_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$.

a. Montrer que : la suite (a_n) est géométrique de raison 2 puis donner a_n en fonction de n .

b. Calculer la somme suivante : $S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = u_n - v_n$.

a. Montrer que : la suite (b_n) est arithmétique de raison $r = -4$.Donner b_n en fonction de n .

b. Calculer la somme suivante : $S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$.

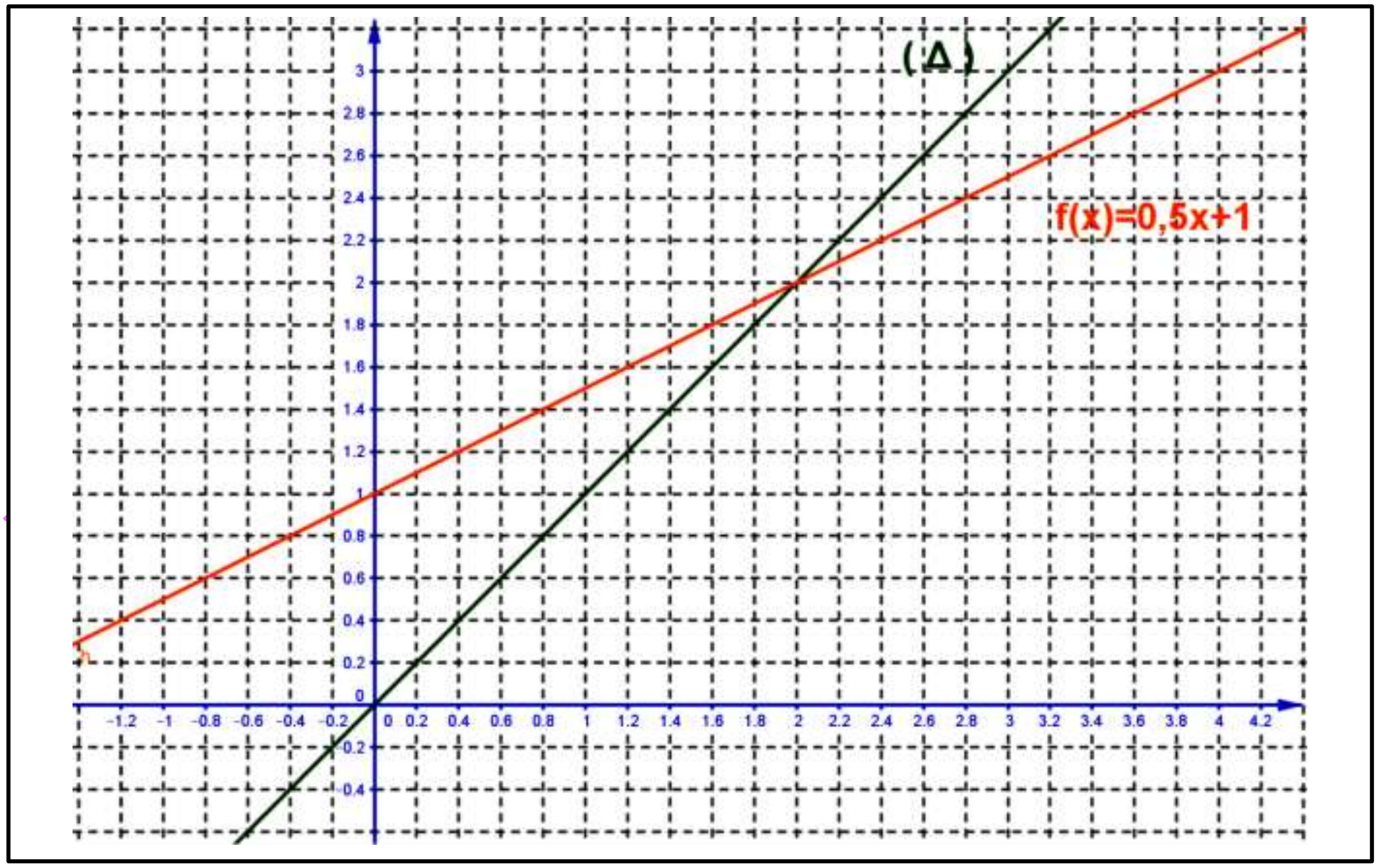
c. On déduit les sommes : $S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

13.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

PREMIER. Méthode ☹ (graphique)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. La figure ci-dessous représente (C_f) la courbe représentative de f . et la droite (Δ) d'équation cartésienne : (Δ) : $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de mesure 5 cm) .



1. Construire sur l'axe des abscisses les points : A_0 et A_1 et A_2 et A_3 et A_4 tel que les coordonnées sont respectivement $(u_0,0)$ et $(u_1,0)$ et $(u_2,0)$ et $(u_3,0)$ et $(u_4,0)$ sachant que : $u_1=\frac{3}{2}=1,5$ et $u_2=\frac{7}{4}=1,75$ et $u_3=\frac{15}{8}=1,875$ et $u_4=\frac{31}{16}\simeq 1,9375$.

2. Peut-on donner sur la figure l'itinéraire à suivre à partir de A_0 pour obtenir les valeurs : u_1 et u_2 et u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses sans utiliser leurs valeurs donner au dessus .

3. Donner la conjecture obtenue . quelle conjecture obtenue si on prend $u_0=4$?

DEUXIÈME. Méthode ☹ (analytique)

1. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une expression de la suite (u_n) en fonction de f .

3. ..

a. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 1\le u_n\le 2$.

b. Montrer que (u_n) est croissante .

c. Quelle constations peut-on déduire pour les termes u_n quand n prend des valeurs assez grand.

TROISIÈME. Application :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\ge 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}=\frac{3}{5}u_n+3 \end{cases}$.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{3}{5}x+3$. Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de mesure 5 cm) .

Soient (C_f) la courbe représentative de f et la droite (Δ) d'équation cartésienne : (Δ) : $y=x$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de mesure 5 cm) .

1. Construire la courbe (C_f) et la droite dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Construire sur l'axe des abscisses les points : A_0 et A_1 et A_2 et A_3 et A_4 tel que les coordonnées sont respectivement $(u_0,0)$ et $(u_1,0)$ et $(u_2,0)$ et $(u_3,0)$ et $(u_4,0)$ sans calculer les valeurs de u_1 et u_2 et u_3 et u_4.

3. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 et u_3 et u_4.

4. A quelle valeur s'approche le nombre u_n quand n est assez grand ?

14.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+\sqrt{u_n}} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u_n > 3$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$..

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.

15.

Soient a et b de $\mathbb{R}$ tel que : $0 < a < b$.

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{v_n}} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$ et

$\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que : pour tout n de $\mathbb{N}$ les suites (u_n) et (v_n) sont strictement positives.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u_n < v_n$.

3. ..

a. Montrer que :pour tout x et y de $\mathbb{R}$ tel que $0 < x < y$ on a : $\dfrac{y-x}{2(x+y)} < \dfrac{1}{2}$.

b. On déduit que : $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

c. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

d. Montrer que : u_n est croissante et v_n est décroissante.

e. Montrer que :pour tout n de $\mathbb{N}$ le produit $u_n v_n$ est constant.

16.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3u_n + 8 \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit la suite numérique $(v_n)_{n\geq 0}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ v_n = u_n + 4$.

a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques.

b. Ecrire v_n et u_n en fonction de n .

3. Soit la suite numérique $(w_n)_{n\geq 0}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ w_n = v_n + 3n - 1 - 3^n$.

a. Montrer que : (w_n) est une suite arithmétique on précise ses éléments caractéristiques.

b. Calculer les sommes suivantes : $S_v = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S_w = \sum_{i=0}^{i=n} w_i = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

17.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{4u_n + 1} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $\dfrac{1}{2} < u_n \leq 3$.

3. Montrer que : u_n est décroissante

4. Soit la suite numérique $(w_n)_{n\geq 0}$ tel que : $v_n = \dfrac{2}{2u_n - 1}$.

a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique on précise ses éléments caractéristiques.

b. Ecrire v_n et u_n en fonction de n .

c. Calculer la somme suivante $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i$ en fonction de n .

18. Bac 2016 session normale

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{5 - u_n} \end{cases}$.

1. ..Vérifier que : pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$., puis montrer par récurrence que $u_n < 3$: pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Soit la suite numérique (v_n) tel que : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Calculer u_1 et u_2.

a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$, puis on déduit que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que : $u_n = \frac{1+3v_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. Ecrire u_n en fonction de n .

d. Limite hors programme .

19. Bac 2016session de rattrapage

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{cases}$.

1. ..

a. Montrer par récurrence que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{15}{16}(1-u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer que : u_n est décroissante

b. On déduit que la suite (u_n) est convergente .

3. Soit la suite numérique (v_n) tel que : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis Ecrire v_n en fonction de n .

b. Montrer que : $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. Limite hors programme .

20.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+3} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.

3. Montrer que : u_n est décroissante.

4. ..

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c. On déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

21.

Le but de cet exercice de déterminer la limite de la suite suivante $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ par de méthodes différentes .

1ère méthode :

1. Soit la suite numérique $(w_n)_{n\geq 0}$ tel que : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

a. Montrer que : (v_n) est une suite arithmétique on précise ses éléments caractéristiques.

b. Ecrire v_n et u_n en fonction de n .

2. ..

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $-3 \leq u_n \leq 3$.

b. Montrer que : (u_n) est croissante

2^{ième} méthode (graphique) :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$. La figure ci-dessous représente (C_f) la courbe représentative de f . et la droite (Δ) d'équation cartésienne : (Δ) : $y = x$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de mesure 5 cm) .

1. Calculer : u_1 et u_2 et u_3 .

2. Construire sur l'axe des abscisses les points : A_0 et A_1 et A_2 et A_3 et A_4 tel que les coordonnées sont respectivement $(u_0,0)$ et $(u_1,0)$ et $(u_2,0)$ et $(u_3,0)$.

3. Peut-on donner sur la figure l'itinéraire à suivre à partir de A_0 pour obtenir les valeurs : u_1 et u_2 et u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses sans utiliser leurs valeurs donner au dessus .

4. Donner la conjecture obtenue . quelle conjecture obtenue pour la monotonie de la suite de (u_n) et l'encadrement de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

5. On suppose que : $u_0 = 3$ quelle conjecture obtenue pour la monotonie de la suite de (u_n) et l'encadrement de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

3[ième] Méthode ☹ (analytique)

1. Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ .puis on déduit la monotonie de f sur $[-3,3]$.

2. Montrer que : $f([-3;3]) \subset [-3;3]$.

3. Donner une expression de la suite (u_n) en fonction de f .

4. ..

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $-3 \le u_n \le 3$.

b. Montrer que (u_n) est croissante .