

TD LIMITE D'UNE FONCTION

EXERCICES D'APPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS

PROF: ATMANI NAJIB

1BAC BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice1 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

Exercice2 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si : $x > 1 : f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

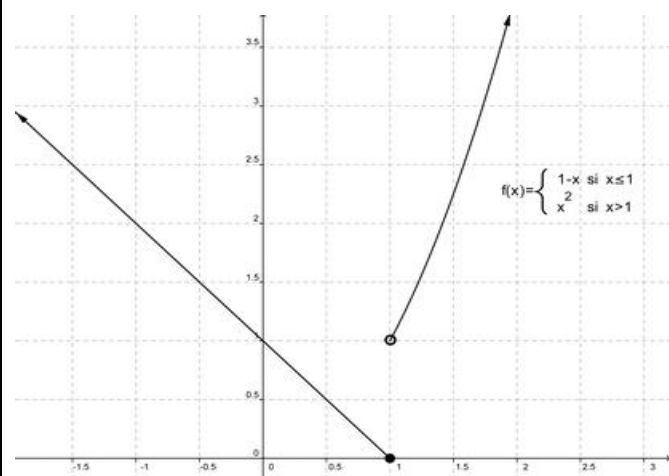
Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si : $x < 1 : f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Exercice3 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Prof/ATMANI NAJIB

$x \mapsto 1 - x$ si $x \leq 1$

$x \mapsto x^2$ si $x > 2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice4 : Soit la fonction g définie par :

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3$ si $x \geq 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha$ si $x < 1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Exercice5 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si : $-1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si : $x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

Exercice6 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

Solution : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

Exercice7 : déterminer : 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

Solution : 1) on a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$

2) on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

Exercice8 : calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$

Solution : on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$ on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x-2 = 0^+$

x	-\infty	-2	1	+\infty
x^2+x-2	+	0	0	+

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -7x^4 = -\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

Exercice10 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$ directement on trouve une

forme indéterminée : $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{1 - \cosh \frac{h}{2}}{\frac{h^2}{2}} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$

(On pose $\sqrt{x} = h$)

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$

On pose $x - \frac{\pi}{6} = h$) donc $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

Donc : $= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$

Exercice11 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

Solution : 1) on pose : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1 \text{ donc : } |f(x)| \leq x^2 \text{ et on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} ? \text{ on pose : } f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* |\cos x| \leq 1 \text{ donc : } |f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3} \text{ et on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)} ? \text{ on pose : } f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ donc :}$$

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2 \text{ donc } 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} ? \text{ on pose : } f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4} \text{ cad } 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ donc : } |f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Exercice12 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc : } D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	0	$-$	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x + 1 = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

Exercice13 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 10 = 0$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x} - 2)(\sqrt{2x} + 2)}{(x^2 + 3x - 10)(\sqrt{2x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x - 4)}{(\sqrt{2x} + 2)} \times \frac{1}{(x - 2)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x} + 2)} \times \frac{1}{(x + 5)} = \frac{2}{14}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1}$?

On a : $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Et $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 5x + 1)$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x^2 + 5x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{8}{3}$$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$?

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

or $x \rightarrow +\infty$ donc $|x| = x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + 1} = \frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

On pose $x - \frac{\pi}{4} = h$ donc $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

or : $\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

Exercice14 : monter que : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

Solution : 1) on a $\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \cos \left(\frac{2}{x} \right) \right| \leq 1$

donc $\left| x^2 \cos \left(\frac{2}{x} \right) \right| \leq x^2$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

Exercice15 : monter que: $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 2$

Solution : $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$ donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq x^2$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Exercice16 : a) monter que: $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3} |x - 4|$

b) monter que: $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = 3$

Solution : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x)-3| = |\sqrt{2x+1}-3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

et on a $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$ donc : $|f(x)-3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

Exercice17 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$$0 \leq 1+\sin x \leq 2 \text{ donc } \left| \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ donc}$$

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercice18: Soit la fonction : $f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x}$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ et $x^2 + x^4 \geq 0$

donc $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$ et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Exercice19 : Soit la fonction : $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq f(x)$

En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : et et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Exercice20 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x-2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice21 : Soit $f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

