Exercices corrigés

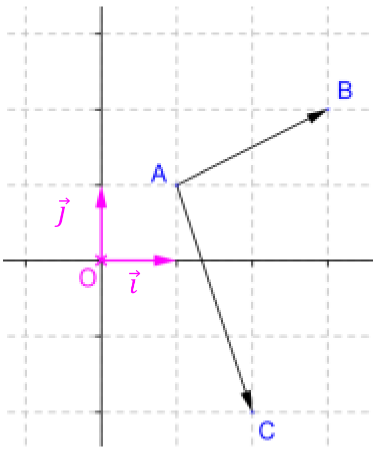
Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** produit scalaire en fonction des coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé
- **Exercice 2 :** propriétés du produit scalaire (règles de calcul et identités remarquables)
- **Exercice 3 :** produit scalaire en fonction des normes de vecteurs
- **Exercices 4 et 5 :** orthogonalité de deux vecteurs et produit scalaire nul
- **Exercice 6 :** formule de la médiane
- **Exercice 7 :** produit scalaire de vecteurs colinéaires
- **Exercices 8 et 9 :** produit scalaire de vecteurs quelconques à l'aide d'une projection orthogonale
- **Exercices 10, 11, 12 et 14 :** produit scalaire en fonction des normes de vecteurs et d'un angle orienté
- **Exercice 13 :** quadrangle orthocentrique
- **Exercice 15 :** équation cartésienne de la médiatrice d'un segment
- **Exercice 16 :** équation de cercle
- **Exercices 17 et 19 :** équation de tangente à un cercle
- **Exercice 18 :** théorème d'Al-Kashi et somme des carrés des côtés d'un parallélogramme
- **Exercice 20 :** droite d'Euler
- **Exercice 21 :** recherche d'un minimum
- **Exercice 22 :** algorithme de perpendicularité de deux droites dans un repère orthonormé du plan

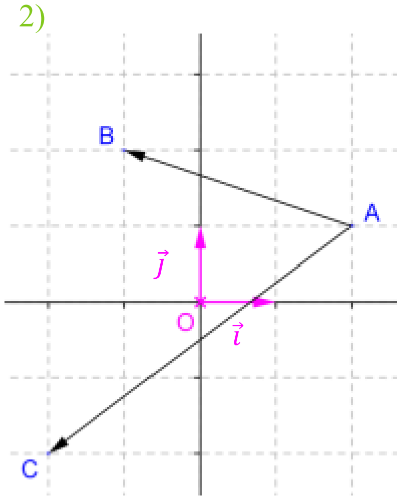
Exercice 1

Soit un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

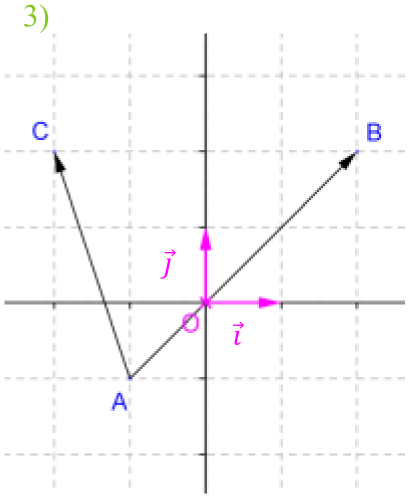
1)



2)



3)



Correction de l'exercice 1

Rappel : Produit scalaire dans un repère orthonormé du plan

Dans un repère orthonormé du plan, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$, alors le produit scalaire (euclidien) du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est donné par la relation :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque : Cette expression ne doit pas être confondue avec la condition de colinéarité $xy' - x'y$.

Il convient tout d'abord de remarquer que le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est orthonormé. En effet, les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont d'une part unitaires (puisque $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$) et d'autre part orthogonaux (puisque $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$).

1) Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1\,;1)$, $(3\,;2)$ et $(2\ ;-2)$.

Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{x_B - y_A}{y_B - y_A} = \binom{3-1}{2-1} = \binom{2}{1}$.

Quant au vecteur $\overrightarrow{AC}$, il a pour coordonnées : $\binom{x_C - y_A}{y_C - y_A} = \binom{2-1}{-2\ -1} = \binom{1}{-3}$.

Il en résulte que : $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = 2 \times 1 + 1 \times\ (-3) = 2 - 3 = \mathbf{-1}$

2) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{-3}{1}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\binom{-3}{-4}$.

De ce fait, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = -3 \times (-3) + 1 \times (-4) = 9 - 4 = \mathbf{5}$.

3) Graphiquement, $\overrightarrow{AB} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\binom{3}{3}$.

De même, $\overrightarrow{AC} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\binom{-1}{3}$.

De ce fait, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = 3 \times (-1) + 3 \times 3 = -3 + 9 = \mathbf{6}$.

Exercice 2

Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{\imath}^{\,2} = 2$, $\|\vec{\jmath}\| = 3$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = -4$.

Calculer $(3\vec{\imath} - \vec{\jmath}).(-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$, $(\vec{\imath} - 3\vec{\jmath})^2$, $\|2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}\|$ en détaillant les étapes de chaque calcul.

Correction de l'exercice 2

Rappel : Propriétés du produit scalaire (symétrie et bilinéarité)

Soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et soit le réel λ.

- **Symétrie :** $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- **Bilinéarité :**
  - ✓ Linéarité par rapport à la première variable : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$
  - ✓ Linéarité par rapport à la seconde variable : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{u}.\vec{v}$

Carré scalaire :

$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

1) Calculons $(3\vec{\imath}-\vec{\jmath}).(-\vec{\imath}+2\vec{\jmath})$.

$$(\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\imath}}-\vec{\boldsymbol{\jmath}}).(-\vec{\boldsymbol{\imath}}+\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{\jmath}}) \underbrace{=}_{\text{bilinéarité}} (3\vec{\imath}).(-\vec{\imath})+(3\vec{\imath}).(2\vec{\jmath})-\vec{\jmath}.(-\vec{\imath})-\vec{\jmath}.(2\vec{\jmath})$$

$$= \underbrace{3\times -1)\,\vec{\imath}.\vec{\imath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} + \underbrace{3\times 2\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}} -1\times \underbrace{(-1)\,\vec{\jmath}.\vec{\imath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}} -1\times \underbrace{2\,\vec{\jmath}.\vec{\jmath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}}$$

$$= -3\underbrace{\vec{\imath}^{\,2}}_{\substack{\text{carré}\\ \text{scalaire}}} + 6\vec{\imath}.\vec{\jmath} + \underbrace{\vec{\imath}.\vec{\jmath}}_{\text{symétrie}} - 2\underbrace{\|\vec{\jmath}\|^2}_{\substack{\text{carré}\\ \text{scalaire}}} = -3\vec{\imath}^{\,2}+7\vec{\imath}.\vec{\jmath}-2\|\vec{\jmath}\|^2 = -3\times 2+7\times -4)-2\times 3^2 = \mathbf{-52}$$

Rappel : Identités remarquables

Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2}+2\,\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ $\quad$ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2}-2\,\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{\,2}$ $\quad$ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^{\,2}-\vec{v}^{\,2}$

2) Calculons $(\vec{\imath}-3\vec{\jmath})^2$.

$$(\vec{\boldsymbol{\imath}}-\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}})^2 \underbrace{=}_{\substack{\text{identité}\\ \text{remarquable}}} \vec{\imath}^{\,2}+2\,\vec{\imath}.(-3\vec{\jmath})+(-3\vec{\jmath})^2 = \vec{\imath}^{\,2}+2\times \underbrace{(-3)\vec{\imath}.\vec{\jmath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport}\\ \text{à la } 2^{\text{nde}} \text{ variable}}} + \underbrace{(-3)^2\vec{\jmath}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}} \text{ et } 2^{\text{nde}} \text{ variables}}}$$

$$=2-6\times -4)+9\times 9 = \mathbf{107}$$

3) Calculons $\|2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}\|$.

$$\|2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}\|^2 = (2\vec{\imath}+3\vec{\jmath})^2 \underbrace{=}_{\substack{\text{identité}\\ \text{remarquable}}} (2\vec{\imath})^2+2\times(2\vec{\imath}).(3\vec{\jmath})+(3\vec{\jmath})^2$$

$$= \underbrace{2^2\,\vec{\imath}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}} + \underbrace{2\times 2\times 3\,\vec{\imath}.\vec{\jmath}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}} + \underbrace{3^2\,\vec{\jmath}^{\,2}}_{\substack{\text{linéarité}\\ \text{par rapport aux}\\ 1^{\text{ère}}\text{ et }2^{\text{nde}}\text{ variables}}} = 4\times 2 + 12\times\ -4) + 9\times 3^2 = 41.$$

Ainsi, $\|\mathbf{2}\vec{\imath} + \mathbf{3}\vec{\jmath}\| = \sqrt{\mathbf{41}}$.

Exercice 3

Soit un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $AD = 4$. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$ 3) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

Correction de l'exercice 3

Rappel : Produit scalaire et normes de vecteurs

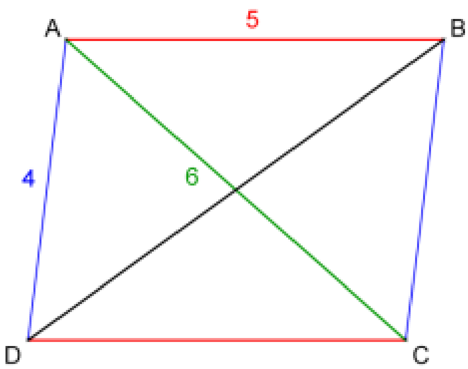
Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

Tout d'abord, analysons l'énoncé.

$ABCD$ est un parallélogramme donc les égalités vectorielles suivantes sont vérifiées :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



1) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$. Par définition du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2\right) \underbrace{=}_{-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}} \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2\right)$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\\ relation\\ de\ Chasles}} \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

2) Calculons désormais $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = (\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{BA}^2 + CA^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2\right) = \frac{1}{2}(BA^2 + CA^2 - CB^2)$$

$\frac{1}{2}(5 \;+6 \;-4\;) = \frac{45}{2}$

3) Calculons enfin $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{DC}\| + \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\|\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\|\right) = \frac{1}{2} \times 2AB^2 = AB^2 = 25$

Remarque : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = AB^2 = 25$

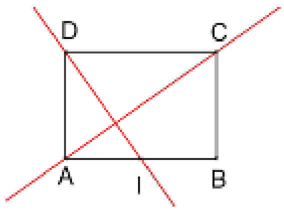
Exercice 4

Soit un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = \sqrt{2}$. I désigne le milieu de $[AB]$. Montrer que les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 4

Rappel : Orthogonalité et produit scalaire nul

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.



Par définition du produit scalaire, on a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{AC}\|\right)$

Il convient donc de déterminer d'une part $\|\overrightarrow{AC}\|^2$, d'autre part $\|\overrightarrow{ID}\|^2$ et enfin $\|\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{AC}\|^2$.

- Commençons par déterminer $\|\overrightarrow{AC}\|^2$.

$ABCD$ est un rectangle donc le triangle ABC est rectangle en B. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Or, comme $ABCD$ est un rectangle $BC = AD$, d'où $AC^2 = 2^2 + \sqrt{2} = 6$.

- Déterminons désormais $\|\overrightarrow{ID}\|^2$.

En outre, I est le milieu de $[AB]$ donc, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AID rectangle en A, on a : $ID^2 = IA^2 + AD^2 = (AB/2) + AD^2 = (2/2)^2 + \sqrt{2} = 3$

- Enfin, déterminons $\|\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{AC}\|^2$.

En utilisant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{ID}} - \underbrace{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

Or, $ABCD$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, si bien que $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

D'où, comme I est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire comme $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, il vient que :

$$\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent, $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\| = \left\|-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right\| = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{9}{4} \times 2^2 = 9$

- Finalement, en remplaçant dans l'expression initiale, on obtient :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|\right) = \frac{1}{2}(6 + 3 - 9) = 0$$

Comme $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{ID} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ID}$ sont orthogonaux. Autrement dit, **les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires**.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On donne $M(2\,;\,\lambda)$, $A(1\,;3)$ et $L(4\,;3-\lambda)$. Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL est rectangle en A.

Correction de l'exercice 5

Le triangle MAL est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AL} = 0$.

Or, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda-3 \end{pmatrix}$.

En outre, le vecteur $\overrightarrow{AL}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_L - x_A \\ y_L - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-\lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AL} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + (\lambda - 3) \times (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$

Soit Δ le discriminant du trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ du second degré d'inconnue λ.

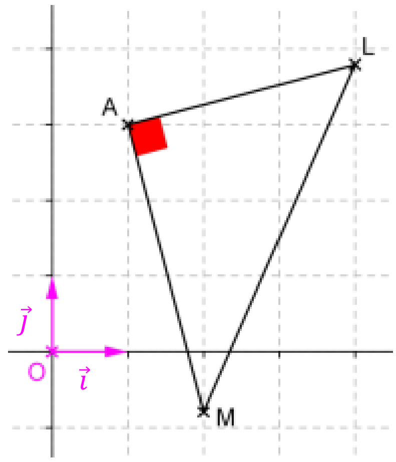
Alors $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$

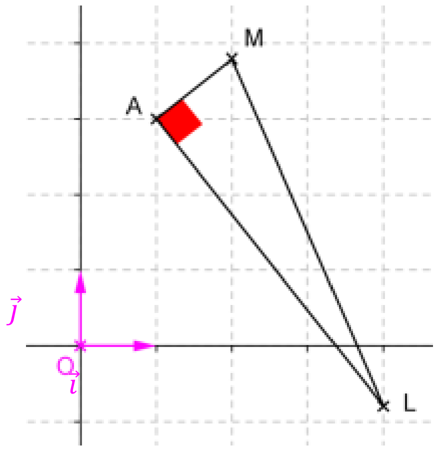
$\Delta > 0$ donc le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 3$ admet deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2, telles que :

$$\lambda_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

Le triangle MAL est rectangle en A si et seulement si $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$ (1er cas) ou si $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ (2ème cas).

- 1^{er} cas : $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$
- $2^{ème}$ cas : $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$





Exercice 6

Soit un triangle MAB et soit I le milieu de $[AB]$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.
2) En appliquant cette formule à un triangle MAB rectangle en M, quelle propriété connue retrouve-t-on ?
3) En appliquant cette formule à un triangle MAB tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$, calculer la longueur de la médiane issue de M.

Correction de l'exercice 6

1) Démontrons que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$. Par ailleurs, I est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Ainsi, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$.

Or, $IA = AB/2$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \boldsymbol{MI^2 - \frac{AB^2}{4}}$.

2) Appliquons cette formule à un triangle MAB rectangle en M.

Si le triangle MAB rectangle en M, alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. Ainsi, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$. Comme MI et AB désignent des distances, il vient que $MI = \frac{AB}{2}$. Ainsi, le point M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$. Mais puisque I est le milieu de $[AB]$, **M appartient finalement au cercle de diamètre l'hypoténuse $[AB]$ du triangle MAB rectangle en M.**

3) Appliquons la formule à un triangle MAB tel que $MA = 4$, $MB = 6$ et $AB = 7$ afin de calculer la longueur de la médiane issue de M.

En notant I le milieu de $[AB]$, (MI) est la médiane du triangle MAB issue de M. Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\|^2\right) + \frac{AB^2}{4}$$

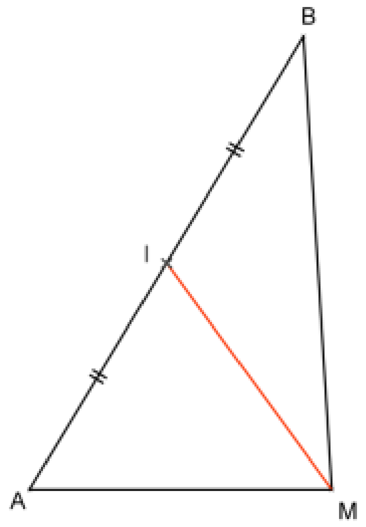
$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}\|^2\right) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 7^2) + \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{55}{4}$$

Par conséquent, $MI = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$.

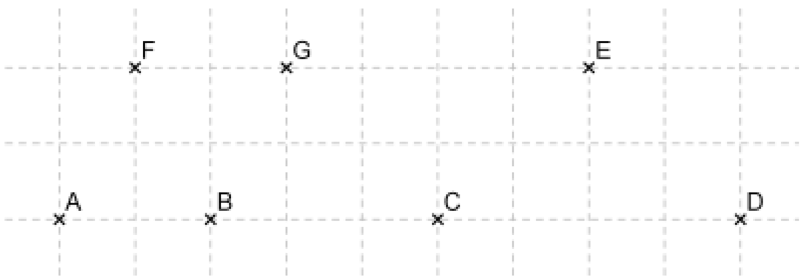
La médiane du triangle MAB issue de M mesure $\frac{\sqrt{55}}{2}$.



Exercice 7

L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$
3) $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF}$
4) $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD}$
5) $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA}$



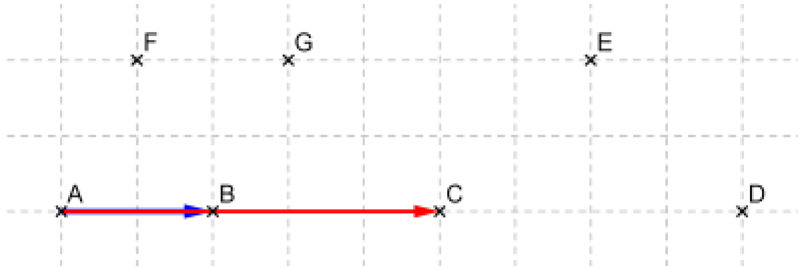
Correction de l'exercice 7

Rappel : Produit scalaire de vecteurs colinéaires

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et distincts du vecteur nul.

- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

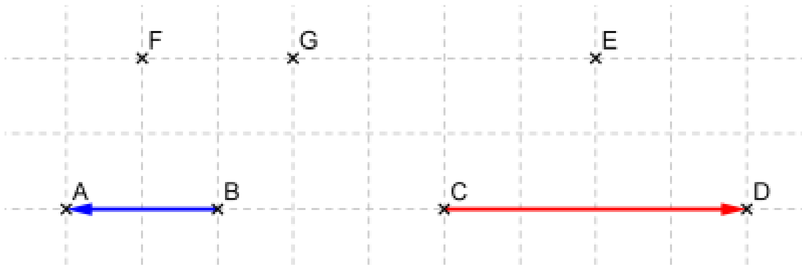
1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$

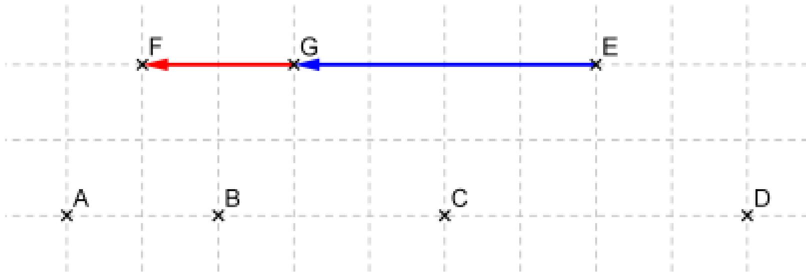
2) Calculons $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| = -2 \times 4 = -8$

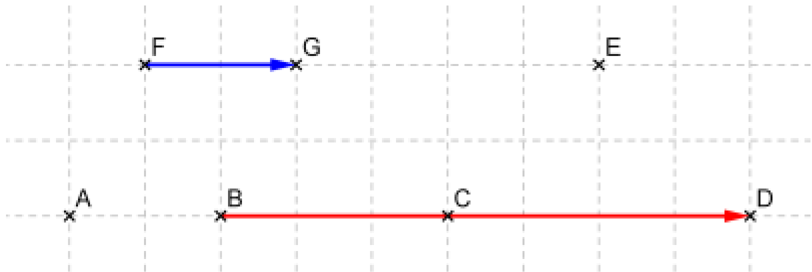
3) Calculons $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF} = \|\overrightarrow{EG}\| \times \|\overrightarrow{GF}\| = 4 \times 2 = 8$

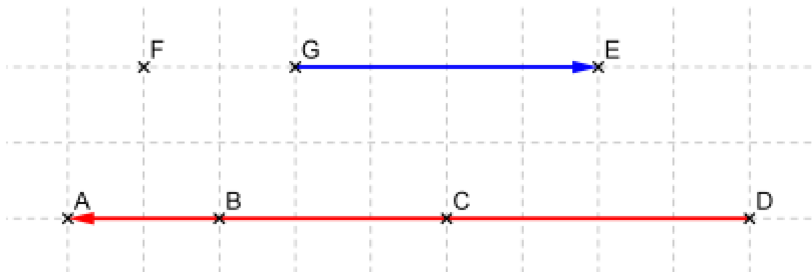
4) Calculons $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens donc :

$\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{FG}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = 2 \times 7 = 14$

5) Calculons $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA}$.



Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc :

$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| = -4 \times 9 = -36$

En résumé,

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD} = -8}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GF} = 8}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BD} = 14}$ $\boldsymbol{\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{DA} = -36}$

Exercice 8

Soit un carré $ABCD$ de centre O et de côté a. Calculer, en fonction de a, les six produits scalaires suivants :

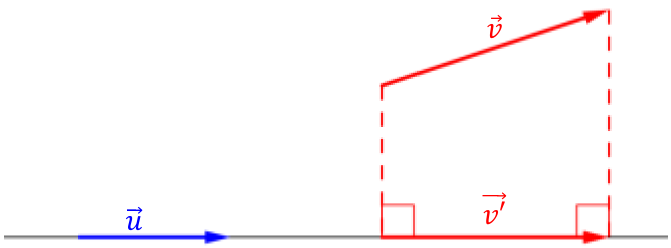
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
3) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$
4) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$
5) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$

Correction de l'exercice 8

Rappel : Produit scalaire et projection orthogonale de vecteurs

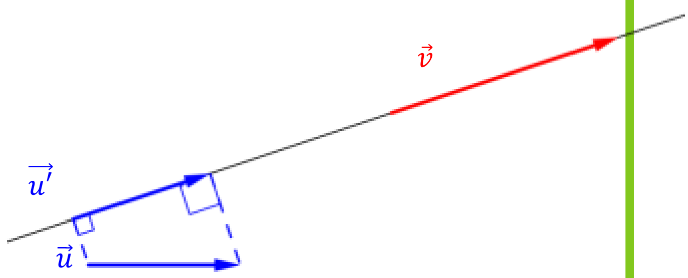
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Alors, on a les relations suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'}$ où $\overrightarrow{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$



Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\vec{u}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'} = \|\vec{u}\| \times \left\|\overrightarrow{v'}\right\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'} = \ \|\vec{u}\| \times \left\|\overrightarrow{v'}\right\|$

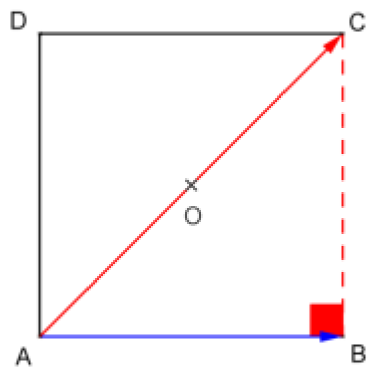
- $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{u'}.\vec{v}$ où $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{v}$



Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{u'}.\vec{v} = \left\|\overrightarrow{u'}\right\| \times \|\vec{v}\|$ et s'ils sont de sens contraires, $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{u'}.\vec{v} = -\left\|\overrightarrow{u'}\right\| \times \|\vec{v}\|$

Remarque importante : On peut donc aussi bien projeter $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ que $\vec{v}$ sur la droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Seuls l'énoncé et la configuration de la figure tracée permettront de choisir la meilleure de ces deux options.

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

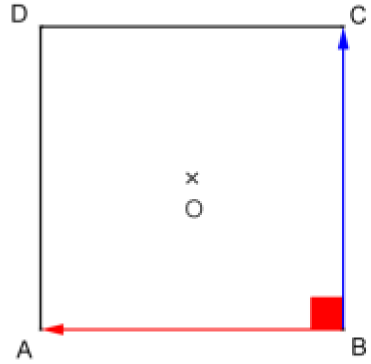


Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, il convient d'effectuer une projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur la droite (AB).

D'une part, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur AB). D'autre part, $ABCD$ est un carré donc B est le projeté orthogonal de C sur (AB). Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB).

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \ = \boldsymbol{a}^2$

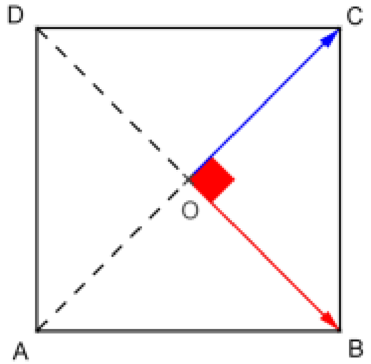
2) Calculons $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.



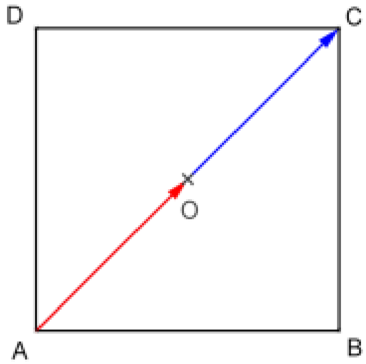
$ABCD$ est un carré donc les droites (BC) et (BA) sont perpendiculaires. Il en résulte que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ respectifs des droites (BC) et (BA) sont orthogonaux. Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0}$.

3) Calculons $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$.

$ABCD$ est un carré de centre O. Or, les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, si bien que l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$ est un angle droit. De ce fait, $\boldsymbol{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} = 0}$.



4) Calculons $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$.



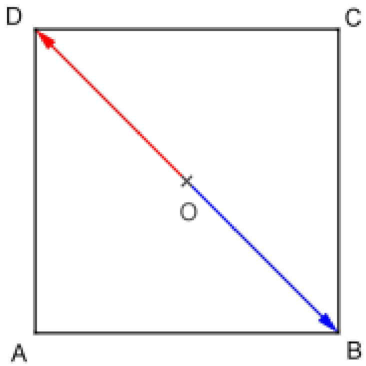
O est le centre de $ABCD$ donc O est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du carré. Autrement dit, les points A, O et C sont alignés dans cet ordre. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont par conséquent colinéaires et de même sens, d'où :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = AC \times AO = AC \times AC/2 = AC^2/2.$$

Or, $ABCD$ est un carré donc BC est rectangle en B. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Par conséquent, $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}} = AC^2/2 = 2a^2/2 = \boldsymbol{a}^2$.

5) Calculons $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$.



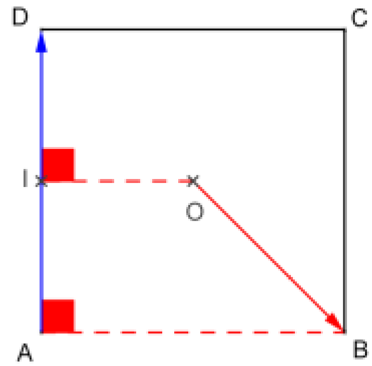
O est le milieu de $[BD]$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Ainsi, $\boldsymbol{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}} = -\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| = -BD/2 \times BD/2 = -BD^2/4$

Or, $ABCD$ est un carré donc ses diagonales sont de même mesure ; d'où $BD = AC$. Ainsi, d'après ce qui précède, $BD^2 = AC^2 = 2a^2$.

Il vient alors que $\boldsymbol{\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}} = -BD^2/4 = -2a^2/4 = \boldsymbol{-a^2/2}$.

6) Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$.



Soit I le milieu de $[AD]$. Alors I est le projeté orthogonal de O sur (AD). En outre, A est le projeté orthogonal de B sur (AD).

Autrement dit, $\overrightarrow{IA}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (AD). D'où $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IA}$.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IA} = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{IA}\| = -AD \times IA = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}a^2$.

En conclusion, $\boldsymbol{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = -a^2/2}$.

Remarque importante : Dans cet exercice, on peut également définir un repère orthonormé du plan, par exemple le repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$. Dès lors, il suffit de noter les coordonnées des points : $(0\,;0)$, $B(a\,;0)$, $C(a\,;a)$, $D(0\,;a)$ et $O(a/2\,;a/2)$. Ensuite, il convient de déterminer les coordonnées des vecteurs intervenant dans les produits scalaires.

Le repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est orthonormé car :

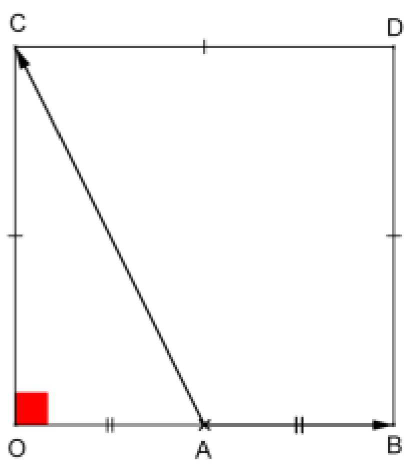
$$\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \|\vec{\jmath}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \vec{\imath}.\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}.\frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2}\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{=0} = 0 \end{cases}.$$

Calculons par exemple $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$. Les vecteur $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\ a/2 \\ -\ a/2 \end{pmatrix}$. Il vient alors que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB} = 0 \times (-a/2) + a \times (-a/2) = -a^2/2$.

Exercice 9

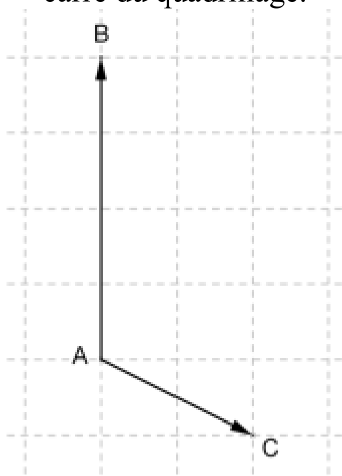
Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

1) $OBDC$ est un carré de côté 5 et A est le milieu de $[OB]$.



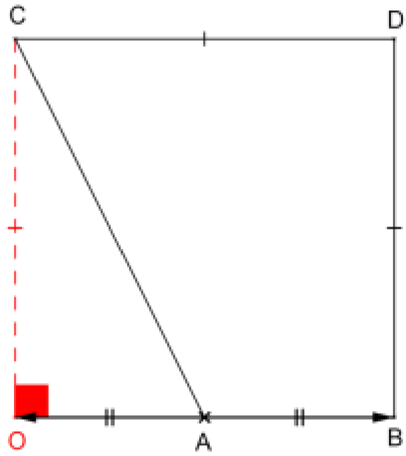
2) ABC est un triangle isocèle en C, tel que $AB = 4$.

3) L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.



Correction de l'exercice 9

1) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



BDC est un carré donc O est le projeté orthogonal de C sur (OB). De plus, comme A est le milieu de $[OB]$, $A \in (OB)$. Autrement dit, O est le projeté orthogonal de C sur (AB).

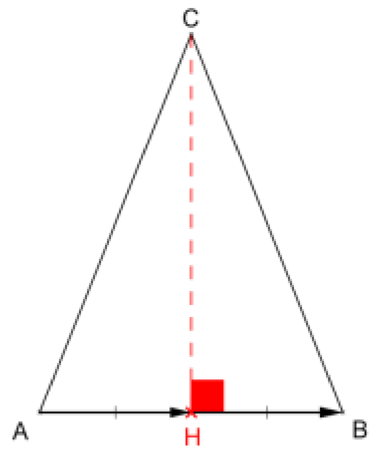
De plus, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur (AB).

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AO}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$. Comme A est le milieu de $OB]$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires mais de sens contraires et $AB = AO = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2}$.

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = -\boldsymbol{\frac{25}{4}}$.

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Le triangle ABC est isocèle en C donc la droite issue de C et passant par le milieu du segment $[AB]$ est un axe de symétrie du triangle et en particulier une médiatrice. En notant H le milieu de $[AB]$, H est alors le projeté orthogonal de C sur (AB).

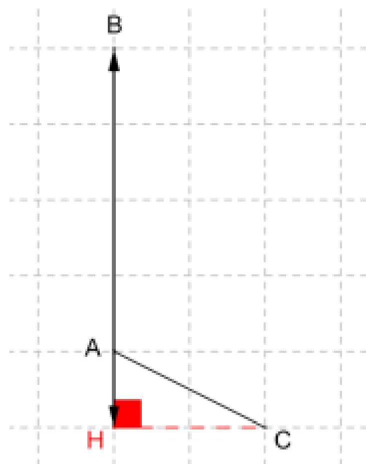
De plus, $A \in (AB)$ donc A est son propre projeté orthogonal sur (AB).

Finalement, le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AH}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = AB \times AH$.

Comme H est le milieu de $[AB]$, alors $AH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = AB \times AH = 4 \times 2 = \mathbf{8}$.

3) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Afin d'utiliser le quadrillage, la seule projection orthogonale exploitable simplement est la projection orthogonale sur la droite (AB). Notons alors H le projeté orthogonal de C sur (AB) et remarquons que le projeté orthogonal de A sur (AB) est A lui-même car $A \in (AB)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|$.

Par ailleurs, $AB = 4$ et $AH = 1$.

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| = -4 \times 1 = -\mathbf{4}$.

Exercice 10

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ distincts du vecteur nul. On note α la mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Illustrer par une figure chacun des cinq cas suivants et calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

1) $\|\vec{u}\| = 5$ $\quad \|\vec{v}\| = 2$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{4}$
2) $\|\vec{u}\| = 3$ $\quad \|\vec{v}\| = \frac{3}{2}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{6}$
3) $\|\vec{u}\| = 4$ $\quad \|\vec{v}\| = 1$ $\quad \alpha = \pi$
4) $\|\vec{u}\| = \frac{3}{2}$ $\quad \|\vec{v}\| = \frac{5}{2}$ $\quad \alpha = \frac{2\pi}{3}$
5) $\|\vec{u}\| = 1$ $\quad \|\vec{v}\| = 2$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

Correction de l'exercice 10

Rappel : Produit scalaire, normes de vecteurs et angle orienté

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$.

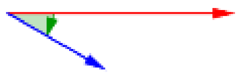
Représentons en rouge le vecteur $\vec{u}$, en bleu le vecteur $\vec{v}$ et en vert l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \alpha$ dans le sens trigonométrique.

1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}}$

2) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{9\sqrt{3}}{4}}$

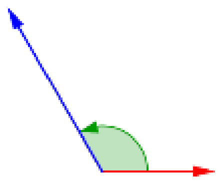


3) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 4 \times 1 \times \cos(\pi) = 4 \times (-1)$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \quad 4}$

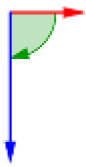
4) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{15}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \quad \boldsymbol{\frac{15}{8}}$



5) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0$

$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$



Remarque importante :

- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle aigu, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est positif. *(cas 1 et 2)*
- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle obtus, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est négatif. *(cas 3 et 4)*
- Si l'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ forme un angle droit, alors le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est nul. *(cas 5)*

Exercice 11

Soient trois points A, B et C du plan tels que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$. Dans chacun des 3 cas suivants, justifier si les affirmations sont vraies ou fausses.

1) Les points A, B et C sont alignés.
2) $\widehat{BAC} = \pi/7$
3) $BC = 2\sqrt{11}$

Correction de l'exercice 11

1) Si les points A, B et C sont alignés, alors $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = AB \times AC$.
Or, d'une part $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| = |-10| = 10$ et d'autre part $AB \times AC = 4 \times 3 = 12$. En conséquence, $|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}| \neq AB \times AC$. **L'affirmation est fausse.**

2) Si $\widehat{BAC} = \pi/7$, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$ puisque $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.
Or, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -10$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$. **L'affirmation est fausse.**

3) Si $BC = 2\sqrt{11}$, alors $BC^2 = \left(2\sqrt{11}\right)^2 = 2^2 \times \sqrt{11}^2 = 4 \times 11 = 44$.
Or, $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \underbrace{\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2}_{\substack{\text{décomposition}\\ \text{par la relation}\\ \text{de Chases}}} = \underbrace{\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}}_{\text{identité remarquable}} = AB^2 + AC^2 \underbrace{-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{\text{linéarité}}$
$= 4^2 + 3^2 - 2 \times (-10) = 16 + 9 + 20 = 45$. Ainsi, $BC^2 \neq 13$. **L'affirmation est fausse.**

Remarque : Pour infirmer les deux premières affirmations, on pouvait également utiliser directement l'expression $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$. Ainsi, cette expression aurait permis d'établir que :

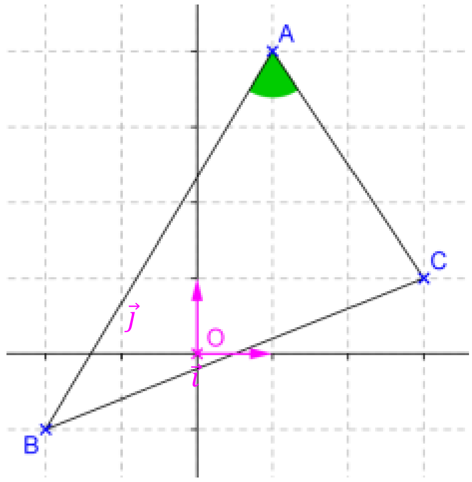
$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{-10}{4 \times 3} = \frac{-5}{6}$$

A l'aide de la calculatrice, $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \approx 146°$ (arrondi au degré près par défaut).

Exercice 12

Soient les points $A(1\,;4)$, $B(-2\,;\,-1)$ et $C(3\,;1)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Donner la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au dixième.

Correction de l'exercice 12



On sait que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$. D'où la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

- Commençons par calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Il en résulte que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 \times 2 + (-5) \times (-3) = -6 + 15 = 9$.

- Déterminons désormais AB et AC.

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

- Calculons maintenant $\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

$$\cos(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{\sqrt{34} \times \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{442}} = \frac{9\sqrt{442}}{442}$$

Dès lors, il résulte que $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) \approx 64{,}7°$ (arrondi au dixième de degré par excès). **L'angle $\widehat{BAC}$ mesure $64{,}7°$ au dixième de degré près.**

Exercice 13

On dit que quatre points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(5\,;\,0)$, $B(-1\,;\,-2)$, $C(11\,;\,-8)$ et $D(7\,;\,4)$. Ces points forment-ils un quadrangle orthocentrique ?

Correction de l'exercice 13

Pour montrer que les points A $(5\,;\,0)$, $B(-1\,;\,-2)$, $C(11\,;\,-8)$ et $D(7\,;\,4)$ forment un quadrangle orthocentrique, il faut montrer que :

1) est l'orthocentre du triangle BCD.
2) B est l'orthocentre du triangle ACD.
3) C est l'orthocentre du triangle ABD.
4) D est l'orthocentre du triangle ABC.

Les points sont placés dans un repère orthonormé et nous avons :

$\overrightarrow{AB}\binom{-6}{2}$ $\quad\overrightarrow{AC}\binom{6}{8}$ $\quad\overrightarrow{AD}\binom{2}{4}$ $\quad\overrightarrow{BC}\binom{12}{6}$ $\quad\overrightarrow{BD}\binom{8}{6}$ $\quad\overrightarrow{CD}\binom{-4}{12}$

1) Commençons par voir si A est l'orthocentre du triangle BCD.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} =$ - $6\times(-4)+(-2)\times 12 = 24 - 24 = 0$ donc $(AB)\perp(CD)$. Autrement dit, le point A appartient à la hauteur de BCD issue de B.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 6\times 8+(-8)\times 6 = 48-48 = 0$ donc $(AC)\perp(BD)$. Autrement dit, le point B appartient à la hauteur de BCD issue de C.

Par conséquent, A est le point de concours de deux hauteurs du triangle BCD : A est l'orthocentre de BCD.

2) Voyons si B est l'orthocentre du triangle ACD.

D'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ donc le point B appartient à la hauteur de ACD issue de A.

D'autre part, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 12\times 2+(-6)\times 4 = 24 - 24 = 0$ donc le point B appartient à la hauteur de ACD issue de C.

Par conséquent, B est le point de concours de deux hauteurs du triangle ACD : B est l'orthocentre de ACD.

3) Voyons si C est l'orthocentre du triangle ABD.

Il a été établi plus haut que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ donc le point C appartient à la hauteur de ABD issue de D.

En outre, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc le point C appartient à la hauteur de ABD issue de B.

Comme C est le point de concours de deux hauteurs du triangle ABD, il résulte que C est l'orthocentre de ABD.

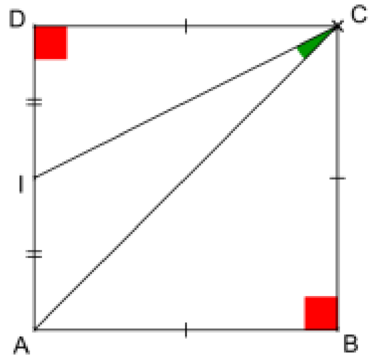
4) Selon un raisonnement analogue au 3), on montre également que D est l'orthocentre du triangle ABC.

Conclusion : **Les points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique**.

Exercice 14

Soit un carré $ABCD$ de côté a, tel que I est le milieu de $[AD]$. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.

Correction de l'exercice 14



$ABCD$ est un carré de côté a donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a : $CA^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

De même, du fait de la nature de $ABCD$, et comme I est le milieu de $[AD]$, le triangle DCI est rectangle en D. Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a : $CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$.

Par définition,

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{CI}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(CI^2 + CA - \|\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC}\|^2\right) = \frac{1}{2}(CI^2 + CA^2 - \mathrm{A}I^2)$$

Or, comme I est le milieu de $AD]$, $AI^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Ainsi, on obtient que :

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{2}(3a^2) = \frac{3a^2}{2}$$

De surcroît,

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{CI}\| \times \|\overrightarrow{CA}\| \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}) = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \times \sqrt{2a^2} \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}) = \sqrt{\frac{a^2}{4} \times 2a^2} \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA})$$

$$= \sqrt{\frac{a^4}{2}} \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}) = a^2\sqrt{\frac{}{2}} \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA})$$

En résumé, $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \frac{3a^2}{2} = a^2\sqrt{\frac{5}{2}} \times \cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA})$. Il résulte alors de cette dernière égalité que :

$$\cos(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA}) = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a^2\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{2} \times}{2 \times \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{CI}\,;\overrightarrow{CA})$ est constant donc **la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de la mesure a du côté du carré $ABCD$**. En l'occurrence, l'angle mesure toujours 18,43° (arrondi au centième de degré près par défaut).

Exercice 15

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on donne les points $(-1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,4)$. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[AB]$.

Correction de l'exercice 15

Rappel : Equation cartésienne de droite

Soit une droite (d) du plan. Il existe 3 réels a, b et c tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ tels que (d) soit l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient l'équation $ax + by + c = 0$. L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de (d).

Soit I le milieu de $[AB]$ et soit (d) la médiatrice de $[AB]$. Tout point $M(x\,;\,y)$ du plan appartient à (d) si et seulement si les droites (IM) et (AB) sont perpendiculaires. Autrement dit, on a :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0.$

Or, le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1\,;3)$. Il s'ensuit que le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$. Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - y_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1) \times 4 + (y - 3) \times 2 = 0$

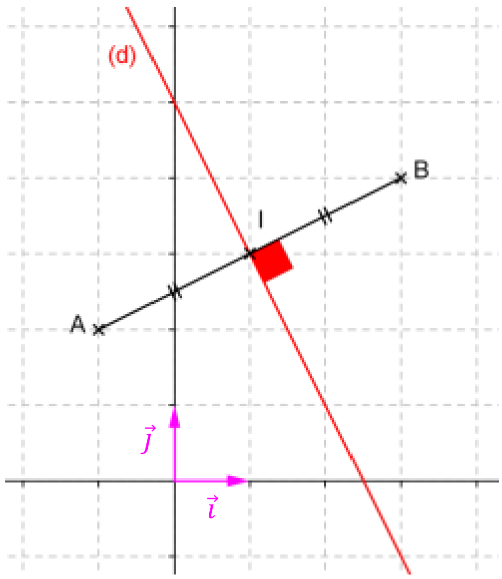
$\Leftrightarrow 4x - 4 + 2y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2(2x + y - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$

Une équation cartésienne de la médiatrice (d) de $[AB]$ est $2x + y - 5 = 0$.



Exercice 16

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, sachant que les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,-1)$ et $(3\,;\,-2)$.

Correction de l'exercice 16

Tout point $(x;\ y)$ du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M. Autrement dit, on a :

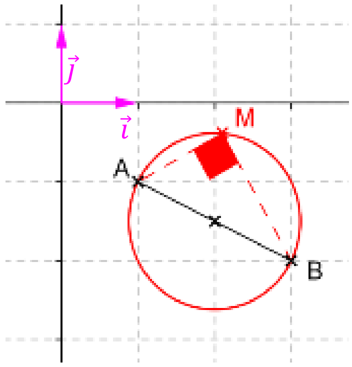
$(x;y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 + 2y + y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$



Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$.

Exercice 17

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on donne les points $A(-2;\ 1)$ et $B(2;3)$. Déterminer une équation de la tangente au cercle de diamètre $[AB]$ et passant par A.

Correction de l'exercice 17

Soit I le milieu de $[AB]$, soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et soit (T) la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Tout point $(o,x;\ y)$ du plan appartient à (T) si et seulement si le triangle IAM est rectangle en A, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0$.

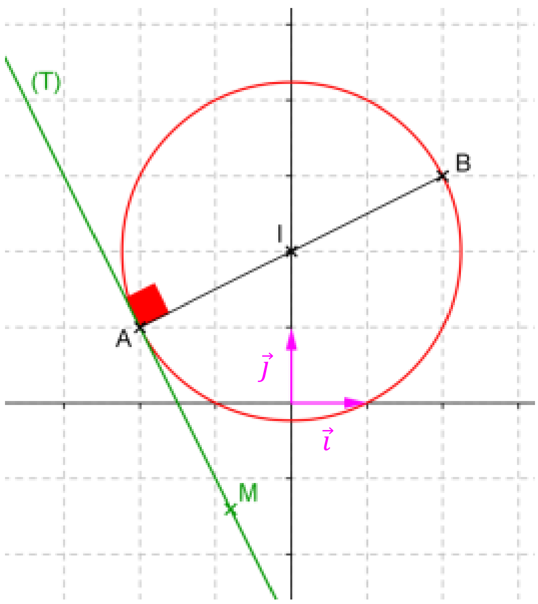
Or, I est le milieu de $[AB]$ donc le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(0;2)$.

En outre, les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, on a :

$(x;y) \in\ T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 4 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$



Une équation cartésienne de la tangente $T)$ au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est $2x + y + 3 = 0$.

Exercice 18

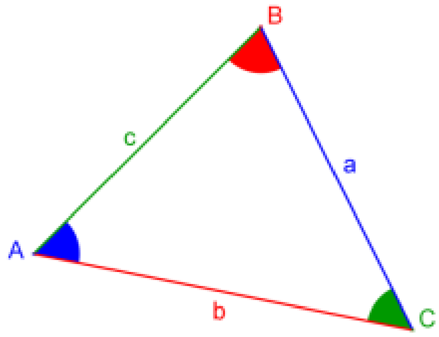
Démontrer que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Correction de l'exercice 18

Rappel : Théorème d'Al-Kashi (également appelé Théorème de Pythagore généralisé)

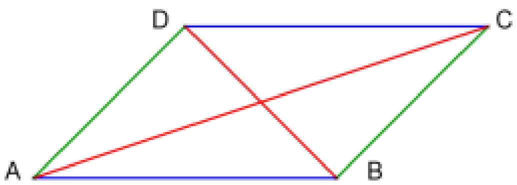
Soit un triangle ABC quelconque. Alors, on a les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$



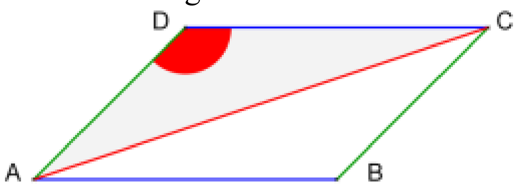
Soit un parallélogramme $ABCD$.

Démontrons que $\underbrace{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}_{\substack{\text{somme des carrés} \\ \text{des côtés} \\ \text{du parallélogramme}}} = \underbrace{AC^2 + BD^2}_{\substack{\text{somme des carrés} \\ \text{des diagonales} \\ \text{du parallélogramme}}}$.



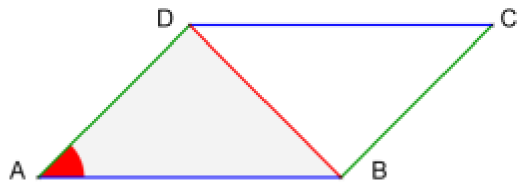
D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

- dans le triangle ADC :



$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos\hat{D}$

- dans le triangle ABD :



$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\hat{A}$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos\hat{D} + AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\hat{A}$$

Or, $ABCD$ est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur et deux angles consécutifs sont supplémentaires. Autrement dit, on a en particulier les relations suivantes :

- $AD = BC$
- $AB = DC$
- $\hat{A} + \hat{D} = \pi$

Ainsi, $AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2 - 2 \times AD \times DC \times \left(\cos\hat{D} + \cos\left(\pi - \hat{D}\right)\right)$

Or, $\cos\left(\pi - \hat{D}\right) = -\cos\hat{D}$ donc $\cos\hat{D} + \cos\left(\pi - \hat{D}\right) = \cos\hat{D} - \cos\hat{D} = 0$.

Par conséquent, $\boldsymbol{AC}^2 + \boldsymbol{BD}^2 = \boldsymbol{AB}^2 + \boldsymbol{BC}^2 + \boldsymbol{CD}^2 + \boldsymbol{DA}^2$. Autrement dit, la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Exercice 19

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on donne les points $(3\,;\,1)$ et $B(-1\,;\,3)$. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre $[AB]$, passant par $C(-2\,;\,5)$.

Correction de l'exercice 19

Notons I le milieu de $[AB]$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre I et de diamètre $[AB]$ et (t) la tangente à $\mathcal{C}$ en $H(x\,;y)$, passant par $C(-2\,;\,5)$.

(t) est la tangente à $\mathcal{C}$ en H, passant par C donc H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$. Par conséquent, les droites (CH) et (IH) sont orthogonales et IH est un rayon du cercle $\mathcal{C}$. Autrement dit, H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{IH} = 0$ et $HI = AI$.

I le milieu de $[AB]$ donc I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire $I(1\,;2)$.

D'une part, $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{IH} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) + (y-5)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 + y^2 - 2y - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0$

D'autre part, $HI = AI \Leftrightarrow HI^2 = AI^2 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (3-1)^2 + (1-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2^2 + (-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$

H est le point d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$ donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0\ (L1) \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L2 \to L1) \\ 3x - 7y + 4y + 8 = 0\ (L1 - L2 \to L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L1) \\ 3x - 3y + 8 = 0\ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ (L1) \\ x = \dfrac{3y-8}{3}\ (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3}\ (L2 \to L1) \\ \left(y - \dfrac{8}{3}\right)^2 - 2 \times \left(y - \dfrac{8}{3}\right) + y^2 - 4y = 0\ (L1 \to L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3}\ (L1) \\ y^2 - \dfrac{16}{3}y + \dfrac{64}{9} - 2y + \dfrac{16}{3} + y^2 - 4y = 0\ (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ - 48y + 64 - 18y + 48 + 9y \ - 36y = 0 \ (9 \times L2 \to L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 18y^2 - 102y + 112 = 0 \ (L2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ - 51y + 56 = 0 \ (L2/2 \to L2) \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant du trinôme $9y^2 - 51y + 56$ du second degré d'inconnue y.

$\Delta = (-51)^2 - 4 \times 9 \times 56 = 585 = 9 \times 65$

$\Delta > 0$ donc le trinôme $9y^2 - 51y + 56$ admet deux racines réelles distinctes y_1 et y_2.

$$y_1 = \frac{-(-51) - \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 - 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 - \sqrt{65}}{6}$$

$$y_2 = \frac{-(-51) + \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 + 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 + \sqrt{65}}{6}$$

$$\begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ 9y \ - 51y + 56 = 0 \ (L2/2 \to L2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \ ou \ y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \ (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ = y - \dfrac{8}{3} \ (L1) \\ y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \ ou \ y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \ (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = y_1 - \dfrac{8}{3} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = y_2 - \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} - \dfrac{8}{3} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} - \dfrac{8}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} - \dfrac{16}{6} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} - \dfrac{16}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{65}}{6} \end{cases} ou \begin{cases} y_2 = \dfrac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{65}}{6} \end{cases}$$

Il existe donc deux points H_1 et H_2 d'intersection de (t) et $\mathcal{C}$, de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{1 - \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 - \sqrt{65}}{6}\right) \text{ et } \left(\frac{1 + \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 + \sqrt{65}}{6}\right)$$

Déterminons désormais une équation cartésienne de chacune des tangentes (t_1) et (t_2) passant respectivement par H_1 et H_2.

$M(x_M ; y_M) \in (t_1)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ sont colinéaires et $M(x_M ; y_M) \in (t_2)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ sont colinéaires.

Rappel : Vecteurs colinéaires

Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$.

L'expression $xy' - x'y$ est le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M\,;\,y_M) \in (t_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_1}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2)\left(\frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5\right) - (y_M - 5)\left(\frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5\right)x_M + \frac{17-\sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2\right)y_M + \frac{5-5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13-\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13+\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{34-2\sqrt{65}}{6} + \frac{5-5\sqrt{65}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{-13-\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13+\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{39-7\sqrt{65}}{6} = 0}$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$.

$M(x_M\,;\,y_M) \in (t_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CH_2}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2)\left(\frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5\right) - (y_M - 5)\left(\frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5\right)x_M + \frac{17+\sqrt{65}}{3} - 10 - \left(\frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2\right)y_M + \frac{5+5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13+\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13-\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{34+2\sqrt{65}}{6} + \frac{5+5\sqrt{65}}{6} = 0$$

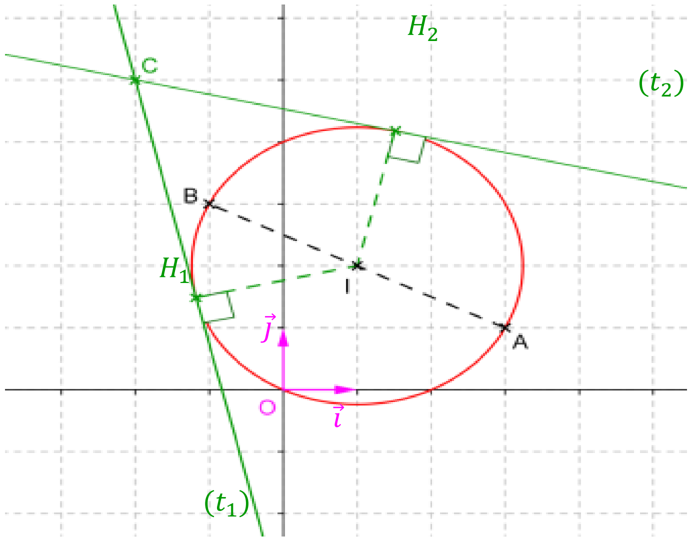
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{-13+\sqrt{65}}{6}x_M + \frac{-13-\sqrt{65}}{6}y_M + \frac{39+7\sqrt{65}}{6} = 0}$$

En conclusion, les tangentes (t_1) et (t_2) au cercle $\mathcal{C}$ passant par C ont pour équations cartésiennes respectives :

$$\frac{-13-\sqrt{65}}{6}x+\frac{-13+\sqrt{65}}{6}y+\frac{39-7\sqrt{65}}{6}=0$$

et

$$\frac{-13+\sqrt{65}}{6}x+\frac{-13-\sqrt{65}}{6}y+\frac{39+7\sqrt{65}}{6}=0$$



Exercice 20

Soit un triangle ABC. On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle, H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

1) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2) Démontrer que G est le centre de gravité du triangle ABC.
3) Démontrer que les points O, H et G sont alignés.

Correction de l'exercice 20

1) Démontrons que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Pour montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC, commençons par montrer que H appartient à la hauteur du triangle ABC, issue de A, autrement dit commençons par montrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=\Big(\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}}\Big).\overrightarrow{BC}=\Big(\overrightarrow{AO}+\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}}\Big).\overrightarrow{BC}=\Big(\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}}\Big).\Big(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}}\Big)$$

$$=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).\Big(\underbrace{-\overrightarrow{OB}}_{\text{cf 4}}+\overrightarrow{OC}\Big)=\Big(\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}}\Big).\Big(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}}\Big)=\underbrace{\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2}_{\text{cf 6}}=\quad C^2-\quad B^2=\underbrace{0}_{\text{cf 7}}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le point O.
2- On utilise l'égalité de l'énoncé définissant le point H, à savoir $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
3- La somme de vecteurs opposés est égale au vecteur nul ; ici, $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$.

4- On met en évidence l'opposée du vecteur opposé ; ici, $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.
5- On permute les vecteurs pour mettre en évidence le produit scalaire $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$
6- On applique l'identité remarquable $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
7- O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC donc $OA = OB = OC$. D'où $OA^2 = OB^2 = OC^2$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ donc H appartient à la hauteur du triangle ABC, issue de A.

Par un raisonnement analogue, on montre que H appartient à la hauteur du triangle ABC, issue de B. En effet :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}}\right).\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}}\right).\overrightarrow{AC} = \left(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}}\right).\left(\underbrace{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}}\right)$$

$$= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}).\left(\underbrace{-\overrightarrow{OA}}_{\text{cf 4}}+\overrightarrow{OC}\right) = \left(\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}}\right).\left(\underbrace{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}}\right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OA}^2}_{\text{cf 6}} = OC^2 - OA^2 = \underbrace{0}_{\text{cf 7}}$$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc H appartient à la hauteur du triangle ABC, issue de B.

Par conséquent, H est le point de concours de deux hauteurs du triangle ABC : H est l'orthocentre de ABC.

2) Démontrons que G est le centre de gravité du triangle ABC.

Pour montrer que G est le centre de gravité du triangle ABC, commençons par montrer que G appartient à la médiane du triangle ABC, issue de A.

Notons A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu A' de $[BC]$.
2- A' est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

Or, par définition du point G, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc $3\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'A} = \vec{0}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont colinéaires : les points G, A' et A sont alignés. Comme $(A'A)$ désigne la médiane du triangle ABC, issue de A, on en déduit que $G \in (A'A)$.

Par un raisonnement analogue, on montre que G appartient à la médiane du triangle ABC, issue de B. En effet :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}+\underbrace{\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{B'B}$$

Explications :

1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu B' de $[AC]$.
2- B' est le milieu de $[AC]$ donc $\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$.

Comme, par définition du point G, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, il vient que $3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{B'B}$ sont colinéaires : les points G, B' et B sont alignés. Comme $(B'B)$ désigne la médiane du triangle ABC, issue de B, on en déduit que $G \in (B'B)$.

Par conséquent, G appartient à deux médianes du triangle ABC : G est le centre de gravité de ABC.

3) Démontrer que les points O, H et G sont alignés.

Par définition, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} \quad 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \quad 3\overrightarrow{OG}$ car $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ainsi, la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ prouve l'alignement des points O, H et G. Autrement dit, **dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont 3 points alignés** (voire confondus dans certains cas particuliers).

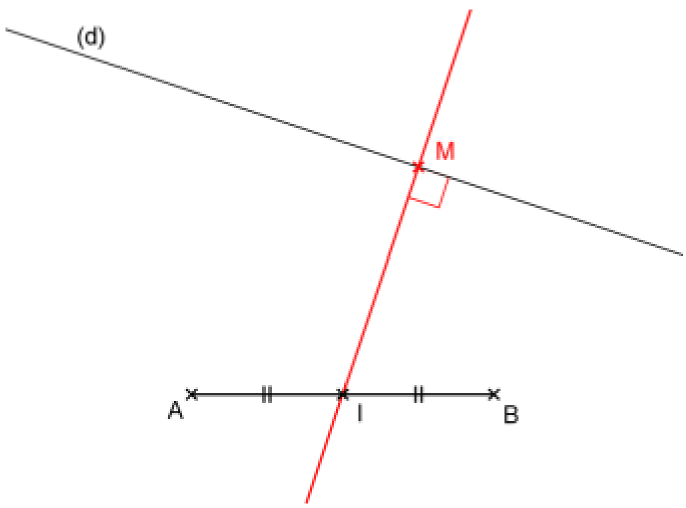
Remarque : Ces 3 points appartiennent à une même droite, appelée « droite d'Euler ».

Exercice 21

et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$. (d) désigne une droite ne passant ni par A, ni par B. M est un point libre de (d). Déterminer la position du point M de sorte que $MA^2 + MB^2$ soit minimale.

Correction de l'exercice 21

Soit I le milieu de $[AB]$.



$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= \left(\overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} \times 4^2$

$= MI^2 + 8$

$MA^2 + MB^2$ est donc minimale quand MI^2 est minimale, c'est-à-dire quand (MI) et (d) sont perpendiculaires.