TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$

Etude analytique -Applications : cercle

Exercices avec corrections

Exercice1 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points

$A(1;-3)$ et $B(3;7)$ et $C(-3;1)$

1)Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

2)Calculer la surface du triangle ABC

Solution : 1)

Methode1 **:** $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$ et $\overrightarrow{AB}(2;10)$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{2^2+10^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$

$AC=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$

Puisque : $AC^2+BC^2=32+72=104$ et $AB^2=104$

Donc : $AC^2+BC^2=AB^2$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

Methode2 : $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$ et $\overrightarrow{AC}(-4;4)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC}=24-24+0$ Donc : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$

Donc : le triangle ABC est rectangle en C

2)puisque le triangle ABC est rectangle en C alors :

$S=\frac{1}{2}CA\times CB=\frac{1}{2}4\sqrt{2}\times 6\sqrt{2}=24$

Exercice2: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points

$A(5;0)$ et $B(2;1)$ et $C(6;3)$

1) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

Solution : 1) $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

et on a : $\overrightarrow{AB}(-3;1)$ et $\overrightarrow{AC}(1;3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=-3\times1+1\times3=-3+3=0$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-10$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$ et $AC=\sqrt{10}$

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{0}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=0$

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{-10}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-1$

2) on a : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ et $AB=AC$ donc le triangle ABC est rectangle et isocèle en A

$(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{-\pi}{2}[2\pi]$ car : $(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}})=\frac{-\pi}{4}[2\pi]$ et

$\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-1$

Donc : $(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})=(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})+(\overline{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}})[2\pi]$

$(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})=\frac{-\pi}{2}-\frac{\pi}{4}[2\pi]=-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice3 : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0)+1(y-1)=0$

donc : (D) : $2x+y-1=0$

Exercice4 :donner un vecteur normal a la droite (D) dans les cas suivants : 1)$(D):x-2y+5=0$

2)$(D):2y-3=0$ 3)$(D):x-1=0$

Solution : un vecteur normal a la droite (D) d'équation cartésienne : $ax+by+c=0$

Est $\vec{n}(a;b)$

1)$(D):x-2y+5=0$: $\vec{n}(1;-2)$ un vecteur normal

2) $(D):0x+2y-3=0$: $\vec{n}(0;2)$ un vecteur normal

2) $(D):1x+0y-1=0$: $\vec{n}(1;0)$ un vecteur normal

Exercice5 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ et $C(1;5)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) perpendiculaire à la droite (AB) passant par C

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à la droite (AB) passant par C

Solution : 1)soit M un point du plan $(\mathcal{P})$

$M\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 6(x-1)-(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 6x-y-1=0$

Donc : $(D):6x-y-1=0$

1)soit $M(x;y)$un point du plan $(\mathcal{P})$

$M\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\bullet\vec{n}=0$

Avec $\vec{n}$ un vecteur normal a la droite (AB)

Le vecteur : $\overrightarrow{AB}(6,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et on a : $\vec{n}(1,6)$

On a donc : $M\in(\Delta)\Leftrightarrow(x-1)+6(y-5)=0$

$\Leftrightarrow x+6y-31=0$ Donc : $(\Delta):x+6y-31=0$

Exercice6 : dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;2)$ et $B(-2;3)$ et $C(0;4)$

1)déterminer une équation cartésienne de la droite (D) médiatrice du segment$[AB]$

2)déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Solution : 1) $(D)/\,ax+by+c=0$

Avec $\overrightarrow{AB}(a,b)$ un vecteur normal a (D)

$\overrightarrow{AB}(-3,1)$ donc :$(D)/-3x+y+c=0$

Or $I\in(D)$ I est le milieu du segment$[AB]$

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

Donc : $-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0\Leftrightarrow c=-4$

Par suite : $(D)/-3x+y-4=0$

2)(Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(2,1)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/\,2x+y+c=0$ et on a $A\in(\Delta)$ donc

$2\times1+2+c=0\Leftrightarrow c=-4$

$(\Delta)/\,2x+y-4=0$

Exercice7 :(D) $2x+3y-1=0$ et (D') $\frac{3}{2}x-y+4=0$

Etudier la position relative de (D) et (D')

Solution :

$\vec{n}(2;3)$ est un vecteur normal de(D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$est un vecteur normal de$(D')$

$\vec{n}\bullet\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$ donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$

donc $(D)\perp(D')$

Exercice8 : Soient la droite (D) d'équation : $(D):3x+4y+5=0$

1)Déterminer les coordonnées du point H la projection orthogonale de O sur (D)

2)calculer La distance du point O à la droite (D)

3)Déterminer les coordonnées du point O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Solution :1)puisque H est la projection orthogonale de O sur (D) alors H est le point d'intersection de la droite (D)et la droite (Δ) qui passe par O et perpendiculaire a (D) on va donc résoudre le système suivant :$\begin{cases}(D):3x+4y+5=0\\(\Delta):4x-3y=0\end{cases}$ On trouve : $x=\frac{-3}{5}$ et $y=\frac{-4}{5}$ donc $H\left(\frac{-3}{5};\frac{-4}{5}\right)$

Autre méthode :Soit $H(x_H;y_H)$ on a

$H\in(D)\Leftrightarrow 3x_H+4y_H+5=0$

$\overrightarrow{OH}$ est normal a la droite (D) donc colinéaire avec $\vec{u}(3;4)$ Donc : $\exists k\in\mathbb{R}/\overrightarrow{OH}=k\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H=3k\\y_H=4k\end{cases}$

Pour déterminer x_H et y_H on va donc résoudre le système suivant : $\begin{cases}(1)\,x_H=3k\\(2)\,y_H=4k\\(3)\,3x_H+4y_H+5=0\end{cases}$

On remplace (1) et (2) dans (3)on trouve :

$k=\frac{-1}{5}$ Donc : $\begin{cases} x_H=\frac{-3}{5} \\ y_H=\frac{-4}{5}\end{cases}$

2) $d(O;(D))=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\times0+4\times0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1$

3) O' le symétrique de O par rapport à la droite (D)

Donc H est le milieu du segment $[OO']$

Donc : $\overrightarrow{O'H}=-\overrightarrow{OH}$ on pose : $O'(x;y)$

Donc : $\begin{cases}\frac{-3}{5}-x=\frac{3}{5}\\ \frac{-4}{5}-y=\frac{4}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{6}{5}\\ y=-\frac{8}{5}\end{cases}$ Donc : $O'\left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$

Exercice9: dans Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé et direct $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ Considérons les points $A(1;-1)$ et $B(4;-1)$ et $C(-2;2)$

1) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

2)en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

3)Calculer la surface du triangle ABC

4)déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC passant par A

5)déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Solution :1) on a : $\overrightarrow{AB}(3;0)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times(-3)+0\times3=-9$

$\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 0 & 3\end{vmatrix}=9$

2)soit α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ on a :

$\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{3^2+0^2}=3$ et $AC=3\sqrt{2}$

Donc : $\cos\alpha=\frac{-9}{9\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

3) on a : $S=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|=\frac{9}{2}cm^2$

4)soit (Δ) la hauteur du triangle ABC passant par A

Donc : (Δ) perpendiculaire a (BC) passant par A

Donc $\overrightarrow{BC}(-6,3)$ un vecteur normal a (Δ) donc

$(\Delta)/-6x+3y+c=0$ et on a $A(1;-1)\in(\Delta)$ donc

$-6\times1-3+c=0\Leftrightarrow c=9$

$(\Delta)/-6x+3y+9=0$ donc : $(\Delta)/2x-y-3=0$

4)soit (D) la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

Pour Chaque point $M(x,y)$ de la droite (D)

On a : $d(M;(AB))=d(M;(AC))$

D'où $\frac{|y+1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|x+y|}{\sqrt{0^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}|y+1|=|x+y|$

On remarque que (D) se trouve dans le demi plan tel que : $\begin{cases}y+1\geq0\\ x+y\geq0\end{cases}$ donc : $\sqrt{2}(y+1)=x+y$

donc : l'équation cartésienne de (D) est :

$\begin{cases}x+(1-\sqrt{2})y-\sqrt{2}=0\\ y+1\geq0\end{cases}$ (D) est un demi droite

Exercice10 : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1;2)$ et de rayon $r=3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$\mathcal{C}(\Omega,r)$: $(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$

C a d : $x^2+y^2+2x-4y-4=0$

Exercice11 :Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

1) (E): $x^2+y^2-x+3y-4=0$

2) (E): $x^2+y^2-6x+2y+10=0$

3) (E): $x^2+y^2-4x+5=0$

Solutions :1) $a=\frac{1}{2};b=-\frac{3}{2};c=-4$

On a : $a^2+b^2-c=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-4)=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+4=\frac{13}{2}>0$

Donc : $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ donc $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

$R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

alors (E) :est une cercle de centre

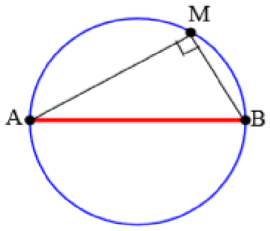
$\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=3;b=-1;c=10$ $a^2+b^2-c=3^2+(-1)^2-10=9+1-10=0$

alors $(E)=\{\Omega(3;-1)\}$

3) $a=2;b=0;c=5$

Exercice12 :Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;2)$ et $B(-3;1)$



solution :

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

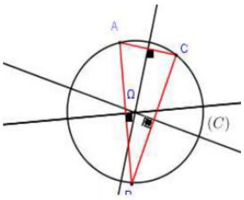
$\overrightarrow{MA}(1-x;2-y)$ et

$\overrightarrow{MB}(-3-x;1-y)$

$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(-3-x)(1-x)+(1-y)(2-y)=0$

Donc : $(C):x^2+y^2+2x-3y-1=0$

Exercice13 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points $A(2;3)$ $B(0;1)$; $C(-4;5)$; $E(5;2)$ et $F(2;4)$



1)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC.

2)Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF.

Solution : 1)Soient $I(1;2)$ et $J(-1;4)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$donc (Δ) passe par $I(1;2)$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2;-2)$ donc une équation de (Δ) est :

$(\Delta):-2(x-1)-2(y-2)=0$

Donc : $(\Delta):-2x+2-2y+4=0$ donc $(\Delta):-2x-2y+6=0$

donc $(\Delta):x+y-3=0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$donc (Δ')passe par $J(-1;4)$et $\overrightarrow{AC}$ un vecteur normal a (Δ')et on a :

$\overrightarrow{AC}(-6;2)$ donc une équation de (Δ')est :

$(\Delta'):-6(x+1)+2(y-4)=0$ donc : $(\Delta'):3x-y+7=0$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}(\Delta):x+y-3=0\\(\Delta'):3x-y+7=0\end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1;4)$ donc $\Omega(-1;4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(-1-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{10}$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

$(C):x^2+y^2+2x-8y+7=0$

2)déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF. On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :$(C'):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

Et on a : $O\in(C')\Leftrightarrow c=0$

$E(5;2)\in(C')\Leftrightarrow 25+4-10a-4b=0$

$F(2;4)\in(C')\Leftrightarrow 4+16-4a-8b=0$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases}10a+4b=29\\a+2b=5\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{19}{8}\\b=\frac{21}{16}\\c=0\end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$(C'):x^2+y^2-\frac{19}{4}x-\frac{21}{8}y=0$

Exercice14: résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases}x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}\prec 0\\x^2+y^2+2x-4\succ 0\end{cases}$$

Solution : $x^2+y^2-2x-4y+\frac{11}{4}=0$

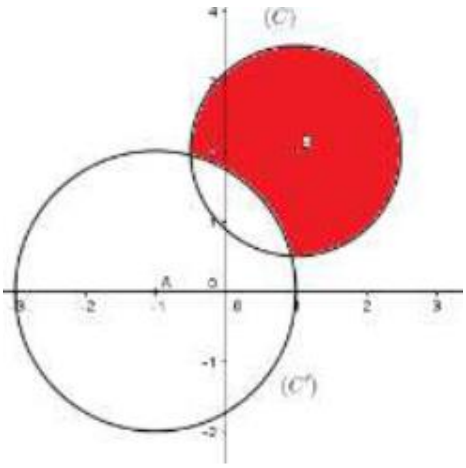
Est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$

de centre $B(1,2)$ et de rayon $r=\frac{3}{2}$

$x^2+y^2+2x-4=0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r'=2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S)est l'extérieur de $(\mathcal{C}')$ intersection l'intérieur de $(\mathcal{C})$



Exercice15 : résoudre graphiquement le système :

$$(S)\begin{cases}(1): x^2+y^2-4x \prec 0\\(2): x-y-1\succ 0\end{cases}$$

solution : $(1): x^2+y^2-4x\prec 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2\prec 2^2$

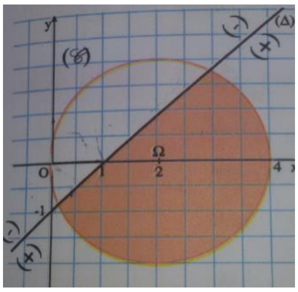
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $r=2$

• $(2): x-y-1\succ 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2+y^2-4x=0$

(demi plan qui contient $\Omega(2;0)$

Car : $2-0-1=1\succ 0$)

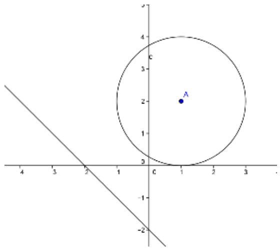
Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice16 : Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x+y+2=0$

Solution : on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$$



Donc : droite (D) est à L'extérieure du cercle $(\mathcal{C})$

$(\mathcal{C})\cap(D)=\emptyset$

Exercice17 : Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=2$ avec la droite d'équation $(D): x-y+2=0$

Solution on calcul $d(\Omega,(P))$?

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$$

Donc : le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (D) se coupent en deux points A et B

Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2\\(2)\,x-y+2=0\end{cases}$$

On a : $(2)\Leftrightarrow x+2=y$

On remplaçant dans (1) $y=x+2$

On trouve : $(1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$

Donc : $(x-1)^2+(x)^2=4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2=4$

Donc : $2x^2-2x-3=0$ $\quad\Delta=28$

Donc : $x_1=\frac{2+2\sqrt{7}}{4}$ et $x_2=\frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$

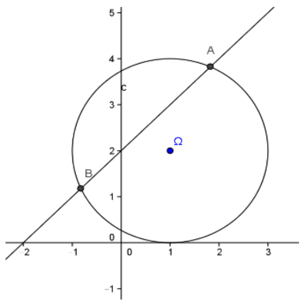
Si : $x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve : $y_1=\frac{1+\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si : $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ on remplace dans $x+2=y$

On trouve :

$y_2=\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2=\frac{5-\sqrt{7}}{2}$



Donc : les points d'intersections sont :

$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$

Exercice18 :: Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$

Solution on calcul $d(\Omega,(P))$?

$(D): 0x+1y-3=0$

$$d(\Omega,(P))=\frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{1}}=1=R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A

Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de $(\mathcal{C})$ est $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

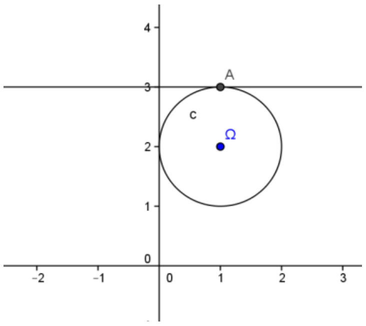
On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=1\\(2)\,y=3\end{cases}$$

On remplaçant dans $y=3$ dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2+1=1\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x-1=0$$



Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

Exercice19 : Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation :

$x^2+y^2-4x-2y+1=0$ (1)

1)Vérifier que $A(0;1)\in(C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A.

Solution : 1)On a : $0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$

Donc $A(0;1)\in(C)$

2)L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A. ??

$a=2;b=1;c=1$: $a^2+b^2-c=2^2+1^2-1=4>0$

Donc $(\mathcal{C})$ cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2;1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$ et $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow x=0$

Donc : L'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A est : $(D): x=0$

Exercice20 : Déterminer l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$

Solution : l'*équation paramétrique du cercle* (C) de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ est :

$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta\\y=-2+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases}x-3=\sqrt{3}\cos\theta\\y-1=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2\Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

Exercice22 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

1) montrer que (C) est *le cercle* (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2)soit le point $A(-1;0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ et qui sont parallèles à la droite : (D) : $3x-4y=0$

4)a)soit la droite (Δ) d'équation : $y=x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $\frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y$

Solution :1) $\begin{cases} x = 2+2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2\cos\theta \\ y-0 = 2\sin\theta \end{cases}$

$(x-2)^2+(y-0)^2 = (2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-0)^2 = 4\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right) \Leftrightarrow$

$(x-2)^2+(y-0)^2 = 2^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(2;0)$ et de rayon $R=2$

2) $A(-1;0)$; (C) : $(x-2)^2+(y-0)^2 = 2^2$

On a : $(-1-2)^2+(0-0)^2-4 = 9-4 \succ 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle $(\mathcal{C})$ et soit : $ax+by+c=0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a;b) \neq (0;0)$

Puisque (T) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ alors :

$d(\Omega,(T)) = R$ cad $\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2$:

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a+c=0$ donc on trouve :

$b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ou $b = -\frac{a\sqrt{5}}{2}$ et l'équation cartésienne de (T) est : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou $2x+\sqrt{5}y+2=0$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ passant par A sont :

(T_1) : $2x-\sqrt{5}y+2=0$ ou (T_2) : $2x+\sqrt{5}y+2=0$

3) (D) : $3x-4y=0$ $\quad\quad \Omega(2;0)$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose :

(T) : $3x-4y+c=0$ et (T) tangentes au cercle $(\mathcal{C})$

Donc : $d(\Omega,(T)) = R \Leftrightarrow$ cad $\frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2$:

$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6+c| = 10 \Leftrightarrow 6+c=10$ Ou $6+c=-10$

$c=4$ ou $c=-16$

Donc les tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ sont :

(T_1') : $3x-4y+4=0$ ou (T_2') : $3x-4y-16=0$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$\begin{cases} (x-2)^2+(y-0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases}$ donc : $y=x$ et $2x^2-4x=0$

donc : ($x=0$ ou $x=2$) et $y=x$

donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points :

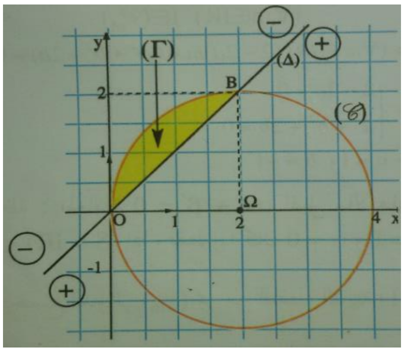
$O(0;0)$ et $B(2;2)$

4)b) $\frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leq 0 \\ x^2+y^2-4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leq 0 \\ (x-2)^2+y^2-4 \leq 0 \end{cases}$

L'inéquation : $(x-2)^2+y^2-4 \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C)

Et L'inéquation : $x-y \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ)

Voire la figure ci-dessus :



Exercice23:le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$A(3;4)$ $\quad B(4;1)$; $C(2;-3)$

1)montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2)Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution :: 1) on a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$

$\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{2}\right) - 3\left(y-\frac{5}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y)\in(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système : $\begin{cases} x-3y+4=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

$(C): x^2+y^2+2x-2y-23=0$

Exercice 24:le plan ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1)déterminer l'ensemble (C_1)

2) a)montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente A toutes les *cercles* (C_m)

3) b)soit $m \succ \frac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

solution :1) (C_1) ? pour $m=1$ on a :

$(C_1): x^2+y^2-2x+2y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ et } y+1=0 \Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1|$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b)on pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

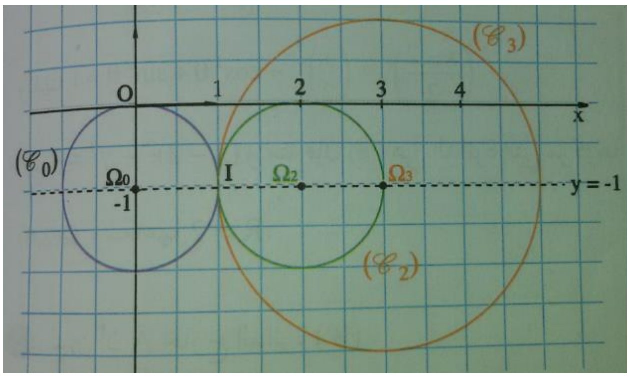
on a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$ privé du Point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b)\in(C_m)$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0$

$\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a=0 \\ a^2+b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a)L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$

Et $d(\Omega_m,(\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |m-1| = R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b)on a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m\succ\frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m\succ 0$

donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d(\Omega_m,(AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m)

Car : $\frac{2}{\sqrt{5}}R_m \neq R_m$