

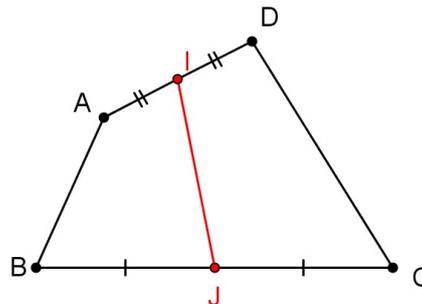
Exercices sur le barycentre

Exercice 1 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[AD]$ et J celui de $[BC]$.

- 1) Ecrire \overrightarrow{IJ} comme la somme de \overrightarrow{AB} et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
- 2) Décomposer le même \overrightarrow{IJ} en utilisant \overrightarrow{DC} .
- 3) En déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.



Exercice 2 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O , I est le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$.

- 1) Exprimer \overrightarrow{OI} en fonction de \overrightarrow{BC} .
- 2) Justifier les égalité : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
- 3) Quel théorème vous permet de conclure que O , I et J sont alignés ?

Exercice 3 :

Rappels sur les vecteurs

ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I , E et F sont alignés.

Exercice 4 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme, M , N , Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P . Il s'agit de trouver le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$. Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- 1) Calculer les coordonnées des points M , N et Q .
- 2) Justifier que P a pour coordonnées $(1; k)$.
- 3) En déduire que les vecteurs \overrightarrow{MQ} et \overrightarrow{NP} sont colinéaires et calculer k .

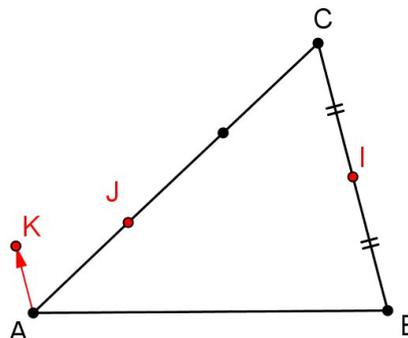
Exercice 5 :

Rappels sur les vecteurs

Sur la figure c-contre, I est le milieu de $[BC]$, J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Calculer les coordonnées de I, J et K puis prouver que I, J et K sont alignés.



Exercice 6 :

Barycentre de deux points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. Construire (s'il existe) le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ dans chacun des cas suivants :

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $\alpha = 4, \beta = -1$ | 3) $\alpha = 2, \beta = -2$ |
| 2) $\alpha = 2, \beta = 1$ | 4) $\alpha = \frac{1}{10}, \beta = \frac{1}{5}$ |

Exercice 7 :

Barycentre de deux points

A et B sont deux points tels que $AB = 9$ cm. Construire (s'il existe) le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ dans chacun des cas suivants :

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $\alpha = 4, \beta = 5$ | 4) $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ |
| 2) $\alpha = 8, \beta = -5$ | 5) $\alpha = -1, \beta = -5$ |
| 3) $\alpha = -11, \beta = 2$ | 6) $\alpha = 0, \beta = 2011$ |

Exercice 8 :

Barycentre de deux points

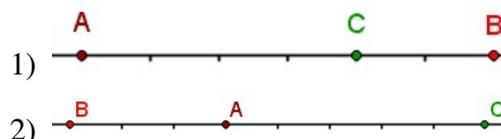
Les points A et B sont donnés et G est défini par la condition indiquée. Déterminer deux réel α et β tels que G soit le barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$.

- | | | |
|---|---|---|
| 1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$ | 2) $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ | 3) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ |
|---|---|---|

Exercice 9 :**Barycentre de deux points**

Pour les exercices suivants, les points A , B et C sont indiqués sur la figure. Dans les deux cas suivants, trouver deux réels α et β tels que :

- ⇒ A soit le barycentre de (B, α) , (C, β) ;
- ⇒ B soit le barycentre de (A, α) , (C, β) ;
- ⇒ C soit le barycentre de (A, α) , (B, β) .

**Exercice 10 :****Barycentre de trois points**

ABC est un triangle de centre de gravité G . G' est le symétrique de G par rapport au milieu de $[BC]$.

- 1) Prouver que G est le milieu de $[G'A]$.
- 2) Justifier que :

$$\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$$

- 3) Exprimer $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$ puis en déduire que G' est un barycentre de A , B et C affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 11 :**Barycentre de trois points**

ABC est un triangle. Construire (s'il existe) le barycentre G de (A, α) , (B, β) , (C, γ) . Construire d'abord un barycentre de deux points, puis utiliser la règle d'associativité.

- | | |
|--|--|
| 1) $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ | 3) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = -\frac{1}{6}$ |
| 2) $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -3$ | 4) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ |

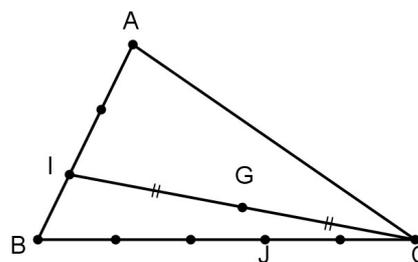
Exercice 12 :**Barycentre de trois points**

ABC est un triangle ; I est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$. J celui de $(B, 1)$, $(C, -2)$ et G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, -2)$. Le but de l'exercice est de localiser G à l'intersection de deux droites.

- 1) Quel théorème permet de justifier l'alignement de A , J et G , puis celui de C , I et G ?
- 2) En déduire que G est à l'intersection de (AJ) et de (CI) . Placer alors G .
- 3) Démontrer que (BG) et (AC) sont parallèles.

Exercice 13 :**Barycentre de trois points**

ABC est un triangle. Les points I et J sont repérés sur la figure ci-contre, dont les graduations sont régulières. G est le milieu de $[CI]$. Le but de l'exercice est de montrer que A , G et J sont alignés.



- 1) Exprimer I comme un barycentre de A et de B , puis J comme un barycentre de B et de C .
- 2) On note G' le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$. Quel théorème permet de justifier que G' est le milieu de $[IC]$? En déduire de $G' = G$.
- 3) Démontrer que A , G et J sont alignés.

Exercice 14 :

Barycentre de trois points

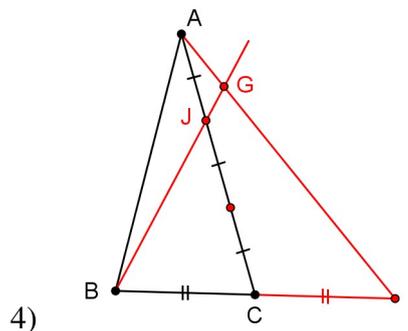
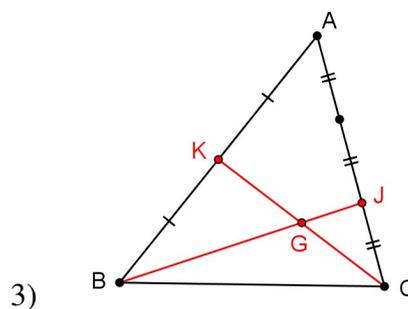
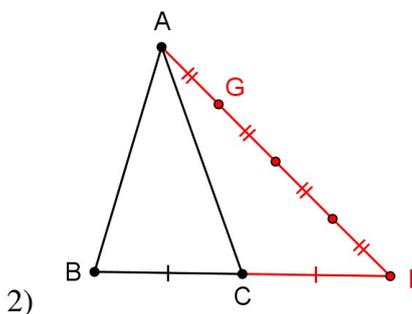
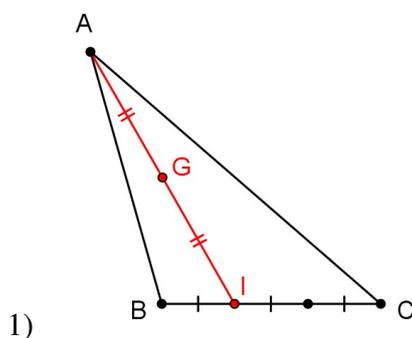
ABC est un triangle de centre de gravité G . Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que le vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire à \overrightarrow{AB} .

- 1) Exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de \overrightarrow{MG} .
- 2) Justifier l'affirmation :
"Dire que M appartient à Δ équivaut à dire que \overrightarrow{GM} est colinéaire à \overrightarrow{AB} "
- 3) En déduire Δ et le construire.

Exercice 15 :

Barycentre de trois points

Pour les exercices suivants, trouver trois réels α, β et γ tels que G soit le barycentre de (A, α) , (B, β) , (C, γ) .



Exercice 16 :

Barycentre de n points

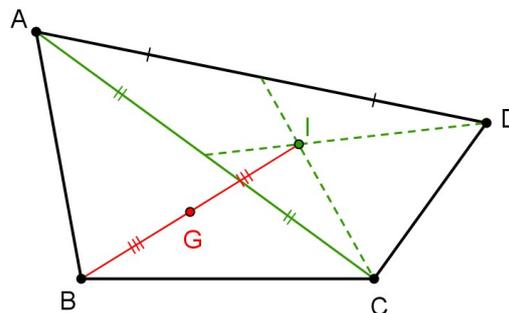
Pour les exercices suivants, justifier de l'existence du barycentre G , puis le construire.

- 1) $ABCD$ est un rectangle et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.
- 2) $ABCD$ est un parallélogramme et G barycentre de $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.
- 3) $ABCD$ est un quadrilatère et G est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.

Exercice 17 :

Barycentre de n points

La figure ci-contre indique une construction du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$. Justifier cette construction.



Exercice 18 :

Barycentre de n points

$ABCD$ est un rectangle, construire le barycentre G de (A, α) , (B, β) , (C, γ) , (D, δ) dans chacun des cas suivants :

- 1) $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$
- 2) $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = -3$
- 3) $\alpha = -\frac{1}{8}$, $\beta = \frac{3}{8}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = \frac{1}{2}$

Exercice 19 :

Coordonnées du barycentre

- 1) Placer les points $A(1; 3)$ et $B(2; 1)$.
- 2) Calculer les coordonnées des points M , barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$ et N , barycentre de $(A, 2)$, $(B, -1)$.
- 3) Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
- 4) Trouver le réel k tel que $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$
- 5) En déduire deux réels α et β tels que I soit le barycentre de (M, α) , (N, β) .

Exercice 20 :

Coordonnées du barycentre

- 1) Placer les points $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$ et $C(-3; -2)$.
- 2) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC .

- 3) Calculer les coordonnées de G' , barycentre de $(A, -2)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$.
 4) les points O , G et G' sont-ils alignés ?

Exercice 21 :**Ensemble de points**

$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. On se propose de trouver l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 10$$

- 1) On pose G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$. Réduire la somme $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.
 2) En déduire la nature de Γ . Construire alors Γ .

Exercice 22 :**Ensemble de points**

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = 4$ cm. On se propose de trouver l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4$$

- 1) On pose G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$, $(C, 2)$. Réduire la somme $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.
 2) En déduire la nature de Γ .
 3) Montrer que Γ passe par le point C . Construire G puis Γ .

Exercice 23 :**Ensemble de points**

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

- 1) Construire G , barycentre de $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$, et prouver que $ABCG$ est un losange.
 2) Quel est l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

- 3) Vérifier que le milieu de $[AC]$ appartient à Γ . Tracer Γ .

Exercice 24 :**Ensemble de points**

ABC est un triangle rectangle en A , I est le milieu de $[BC]$, Γ est le cercle de centre A passant par I . G est le point diamétralement opposé à I .

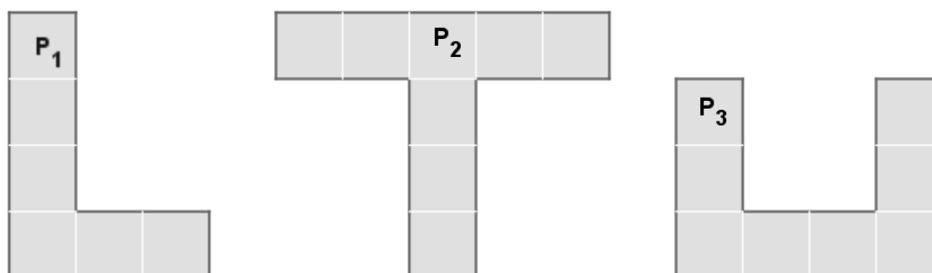
- 1) Prouver que le point G est le barycentre de $(A, 4)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$.
 2) Trouver deux réels b et c tels que A est le barycentre de $(G, 2)$, (B, b) , (C, c) .
 3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 2\|\overrightarrow{BC}\|$$

Exercice 25 :

Centre d'inertie

Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie.

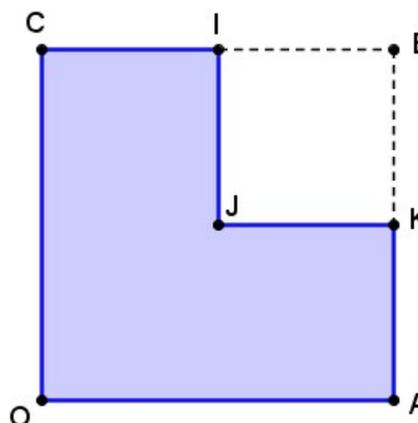


Exercice 26 :

Centre d'inertie

Une plaque homogène P est constituée par un carré $OABC$ de côté 8 cm dont on a retiré le carré $BIJK$ de côté 4 cm.

Trouver la position du centre d'inertie de la plaque par deux méthodes.

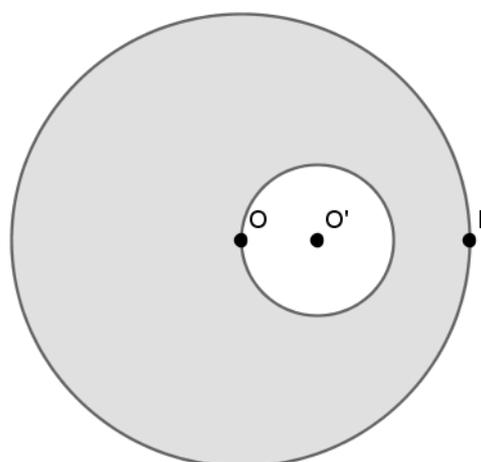


Exercice 27 :

Centre d'inertie

Une rondelle a la forme d'un disque évidé suivant le schéma ci-contre pour lequel $OP = 3OO'$.

1. Trouver la position du centre d'inertie I de la rondelle évidée.
2. On note M la masse de la rondelle évidée. Quelle masse m doit-on placer en P afin que l'ensemble constitué de la rondelle et du point "massique" P ait O pour centre d'inertie ?



Exercice 28 :**Centre d'inertie**

On considère une plaque homogène composée d'un carré de côté 10 cm surmonté d'un rectangle de hauteur 10 cm et de longueur ℓ (exprimée en cm) tel que $\ell \geq 10$ (figure ci-contre)

Déterminer la longueur maximale ℓ_{max} pour laquelle la plaque reste en équilibre sur la base $[AB]$.

