

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice1 : (6points) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

- 0,5 1) a- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 4 - \frac{8}{u_n + 2}$
- 1,25 b- Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad , \quad u_n > 2$
- 0,75 2) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad , \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$
- 1 b- Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 0,5 c- Dédire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad 2 < u_n \leq 5$
- 1 3) a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{2}{u_n + 2} \leq \frac{1}{2}$; et prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$
- 1 b- Dédire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad , \quad 0 < u_n - 2 \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice2 : (7points)

On considère dans le plan les points $A(3;2)$, $B(5;4)$ et $C(1;4)$.

- 1,5 1) a- Calculer \overline{BA} , \overline{BC} et $\overline{BA} \cdot \overline{BC}$.
- 1,75 b- Calculer $\cos(\overline{BA}; \overline{BC})$ et $\sin(\overline{BA}; \overline{BC})$.
- 0,75 c- Dédire la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overline{BA}; \overline{BC})}$.
- 1 2) Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ et déduire que ABC est un triangle rectangle et isocèle.
- 3) Soit (D) une droite dans le plan , dont une équation cartésienne est $x + 2y - 1 = 0$.
- 1 a-Déterminer une équation de la droite (Δ) , qui passe par le point A et qui est perpendiculaire à (D)
- 1 b- Déterminer les coordonnées du point H , la projection orthogonale du point A sur la droite(D) .

Exercice 3 : (7points)

On considère dans le plan ,le cercle (C) de centre $\Omega(2;1)$, et tangent à la droite (D) : $x - 2y + 10 = 0$.

- 0,75 1) a- Montrer que le rayon du cercle (C) est $R = 2\sqrt{5}$.
- 0,75 b- Montrer que $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$, est une équation cartésienne du cercle (C) .
- 1,25 2) Vérifier que le point $A(4; -3)$ appartient au cercle (C) , et donner une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en A .
- 3) On considère dans le plan la droite (Δ) , dont une équation cartésienne est $x + y - 1 = 0$.
- 0,5 a- Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points E et F .
- 1 b- Déterminer les coordonnées des points E et F .
- 1 4) Résoudre graphiquement le système
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 < 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$
- 0,5 5) a- Vérifier que le point $B(-1;5)$ se trouve à l'extérieur du cercle (C) .
- 1,25 b- Déterminer les équations des deux tangentes (Δ_1) et (Δ_2) à (C) qui passent par le point B .