Devoir surveillé

Pr. S. Lazaiz

Exercice 1.

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n - 2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) La suite (u_n) est elle monotone ? justifier votre réponse.
2. Montrer par récurrence que $3 \leq u_n \leq 9$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
3. On considère la suite numérique (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n - 5}{u_n}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$
   (b) Écrire v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   (c) Calculer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+2}$ en fonction de n.

Exercice 2.

On considère la suite arithmétique $(w_n)_{n \geq 2}$ telle que

$$w_3 = -11 \quad \text{et} \quad w_7 = -19$$

1. Calculer r la raison de la suite $(w_n)_{n \geq 2}$ et son premier terme w_2.
2. Écrire w_n en fonction de n.

Exercice 3.

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Construire D le barycentre de $(A, 2)$ et $(G, -3)$.
2. (a) Écrire $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{ID}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.
   (b) Déduire que $ABDC$ est un parallélogramme.
3. Déterminer (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que

$$\left\| -3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MA} \right\| = BI$$

   puis construire cet ensemble.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $A(-2, -1)$, $B(-3, 4)$ et $C(1, 3)$.
   Calculer les coordonnées des deux points D et G.