TD CALCUL TRIGONOMETRIQUE

EXERCICES D'PPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Exercice1 : 1)Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2)Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

3) monter que : $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

4) monter que : $\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=0$

Solution :

1) $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2) $\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3)($\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x$??

$\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x$

$=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$

4) $\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$

$\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x$

$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=\sin x\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cos x=\sin x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos x$

$\sin(x-\frac{2\pi}{3})=-\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x$

$\sin(x+\frac{2\pi}{3})+\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x=-2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x=-\sin x+\sin x=0$

Exercice2 :

Soient : $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ et $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ et $\cos a=\sin b=\frac{1}{2}$

1)Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

on a $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\cos^2 b=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\cos^2 b=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Or : $0\prec b\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

calcul de : $\sin a$

on a : $\cos^2 b+\sin^2 b=1\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\cos^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

donc : $\sin^2 a=\frac{3}{4}$ donc $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

or $0\prec a\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) on a : $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Donc : $\sin(a+b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

Exercice3 : Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice4 : calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4}=2\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right)$

D'après : $\cos(2x)=2\cos^2 x-1$ (1)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc :

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D'après : $cos(2x)$ = 1 − $2sin^2x$ (2)

On a Donc : $\cos\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{8}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}\succ 0$ donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice5 : Sachant que $\sin x=\frac{1}{2}$ et $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$

calculer : $c\mathrm{os}(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $c\mathrm{os}(2x)=1-2\sin^2 x$

Donc : $c\mathrm{os}(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

Et on a : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ donc : $\cos^2 x=\frac{8}{9}$

donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

or $0\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$

donc : $\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}$

Exercice6 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2\ \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=\frac{\sin 3x\cos x-\sin x\cos 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x}=\frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=2$$

Exercice7 : Montrer que :

1) $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2)si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sin\alpha\neq -1$ alors

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Solution :

1)on a : $1-\cos x+\sin x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Car : $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ (2) et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1-\cos x+\sin x=2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)$

2) on a : $1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ et $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\right)$

Donc : $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Donc : $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

Exercice8 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Solution :

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12(1-\sin^2 x)=-10\sin^2 x+12$

$=\frac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$

Exercice9 : Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

Exercice10 : Calculer $\tan\frac{11\pi}{12}$

Exercice11 :
1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+2x-1=0$

2- En déduire $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1) utiliser le déterminent Δ

2) utiliser : $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x=\frac{\pi}{8}$

Exercice12 : soit $a\in\mathbb{R}$ tel que : $\tan\frac{a}{2}=\sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2}=-\frac{1}{3}$

$$\sin a=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a=\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2}=-2\sqrt{2}$$

Exercice13 :1- Montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

(E): $2cosx-2sinx-1-\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que $\pi+2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E)

(remarquer que $4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice14 : *Transformer en produits les expressions suivantes :*

1) $A(x)=\sin 2x+\sin 4x$

2) $B(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x$

Solution :1)

$$A(x)=\sin 2x+\sin 4x=2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$$

$$\sin 2x+\sin 4x=2\sin 3x\cos(-2x)=2\sin 3x\cos 2x$$

2)on a : $\cos x+\cos 3x=2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)=2\cos 2x\cos x$

$$\cos 2x+\cos 4x=2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$$

Donc : $B(x)=2\cos 2x\cos x+2\cos 3x\cos x=2\cos x\left(\cos 2x+\cos 3x\right)$

Et on a : $\cos 2x+\cos 3x=2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Donc : $B(x)=4\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$

Exercice15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$sinx+sin3x+sin5x+sin7x=0$

Exercice16 : écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos 2x\times\sin 4x$ 2) $\sin x\times\sin 3x$ 3) $\cos 4x\times\cos 6x$

Solution :

1) $\cos 2x\times\sin 4x=\frac{1}{2}\left(\sin(2x+4x)-\sin(2x-4x)\right)=\frac{1}{2}\left(\sin 6x-\sin(-2x)\right)$

$=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 2x)=\frac{1}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\sin 2x$

2) $\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos(x+3x)-\cos(x-3x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\sin x\times\sin 3x=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(2x)\right)=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

3) $\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\left(\cos(4x+6x)+\cos(4x-6x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 4x-\cos(-2x)\right)$

$\cos 4x\times\cos 6x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Exercice17 : calculer

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$ 2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}$

Solution :

1) $\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\cos\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\cos\pi+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{4}$

2) $\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

$\sin\frac{7\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Exercice18 : Montrer que

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$

3) en déduire que: $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Solution :

1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$

3) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

$=-\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}\times\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)\times\dfrac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice19 : Montrer que $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\tan 3x\times\tan x$

Solution : on a :

$\cos 2x-\cos 4x=-2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\sin(3x)\sin x$

et $\cos 2x+\cos 4x=-2\cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)=2\cos 3x\cos x$

donc : $\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=\dfrac{2\sin 3x\sin x}{2\cos 3x\cos x}=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan 3x\times\tan x$

car : $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Exercice20 : Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Solution :

$\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$

Exercice21 : Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Solution :

1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$

$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=\cos(2\times 2x)=2\cos^2 2x-1=2\left(2\cos^2 x-1\right)^2-1$

$=2\left(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1\right)-1=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

$\sin(4x)=\sin(2\times 2x)=2\sin 2x\cos 2x=2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$ ؟؟

Methode1

$\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos(x+2x)\right)=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}\left(3\cos x+\cos x\left(2\cos^2 x-1\right)-2\sin x\sin x\cos x\right)$

$=\frac{1}{4}\left(2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^3 x+3\cos x\right)=\frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right)=\cos^3 x$

Methode1

$\cos^3 x=\cos^2 x\times\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}\times\cos x=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x\times\cos x)$

$\cos^3 x=\frac{1}{2}\left(\cos x+\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)\right)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

$\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Exercice22 : $P(x)=\sin 2x-\sin x$ et $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

Montrer que : $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$ et

$Q(x)=\cos x(2\cos x+1)$

Solution :

$Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x(1+2\cos x)$

$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$

Exercice23 :1- Linéariser : $2\cos^2 x.\ \sin(2x)$

2- Linéariser : $\cos^3 x$

Exercice24 :1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$-\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

Déterminer les solutions dans l'intervalle$]-\pi,\pi]$

Exercice26 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

Exercice27 :1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équations suivantes :

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ l'équations suivantes :

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution : 1) on a $\cos 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Ssi $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ Ssi

$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) on a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ ssi

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

ssi $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$:

$0\le\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\le 1$ Donc $-\frac{7}{24}\le k\le\frac{29}{36}$ Donc

$-0,29\le k\le 1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\le\frac{13\pi}{12}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le\frac{13}{12}+2k\le 1$ Donc $-\frac{13}{24}\le k\le-\frac{1}{24}$ Donc

$-0,54\le k\le 0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0,\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie ssi

$2x-\frac{\pi}{5}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ ssi $2x\ne\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

ssi $2x\ne\frac{7\pi}{10}+k\pi$ ssi $x\ne\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$ Donc

$D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ Donc

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ssi $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$ ssi

$2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$ ssi $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$ donc

$-\frac{1}{2}\le\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\le\frac{1}{2}$ donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$

donc $-\frac{29}{40}\le\frac{k}{2}\le\frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20}\le k\le\frac{11}{20}$ Donc

$-1,45\le k\le 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

Exercice28 : $\cos x-\sin x$ $a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

Exercice29 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$b=1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

$\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

Exercice30 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$\sqrt{3}\,cos(3x)+sin(3x)+2=0$

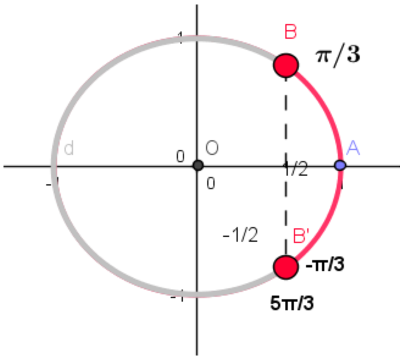
Exercice31 : Considérons l'inéquation $\cos x\ge\frac{1}{2}$

Tout d'abord il faut résoudre l'équation $\cos x=\frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M(\frac{\pi}{3})$ et $M'(-\frac{\pi}{3})$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation $\cos x\ge\frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $M'IM$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]}=[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$

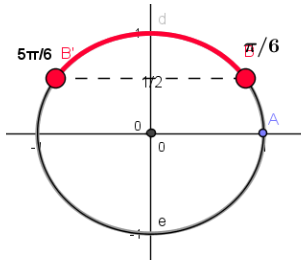
les solutions dans $[0,2\pi]$ sont :

$S_{[0,2\pi]}=[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{5\pi}{3},2\pi]$

Exercice32 : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation :

$2\cos x+\sqrt{3}\le 0$

Exercice33 : Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x\ge\frac{1}{2}$



$\sin x\ge\frac{1}{2}$ ssi $\sin x\ge\sin\frac{\pi}{6}$

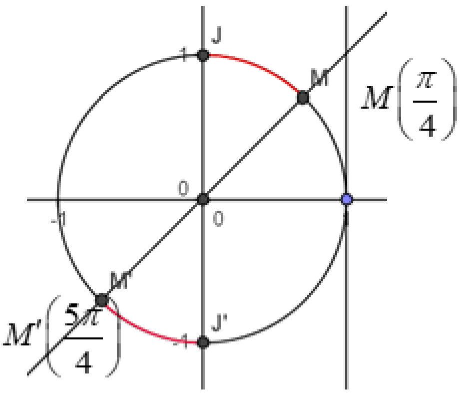
donc $S=\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

Exercice34 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x-1\ge 0$

On a $\tan x-1\ge 0$ ssi $\tan x\ge 1$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{4}=1$ Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $\tan x-1\ge 0$ Donc

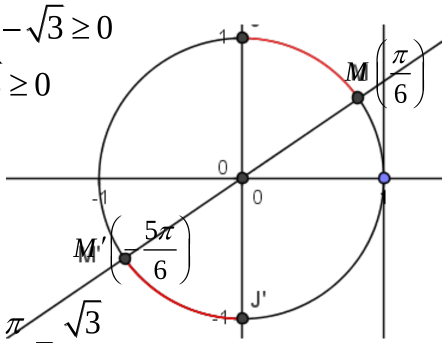
$S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$



Exercice35 : Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

On a $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

ssi $\tan x\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$



On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ Donc

$$S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice36 : 1)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'équation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$

2)Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$

Solution : *Transformation de :* $\sqrt{3}\cos x+\sin x$

$b=-1$ et $a=\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x-\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$:

$-\pi\leq-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq-\frac{1}{2}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{1}{4}\leq k\leq\frac{3}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{2}$

- Encadrement de $\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$-\pi\leq\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$

Donc $-1\leq\frac{1}{6}+2k\leq 1$

Donc $-\frac{7}{6}\leq 2k\leq\frac{5}{6}$ Donc $-\frac{7}{12}\leq k\leq\frac{5}{12}$

Donc $k=0$ on trouve $x_2=\frac{\pi}{6}$

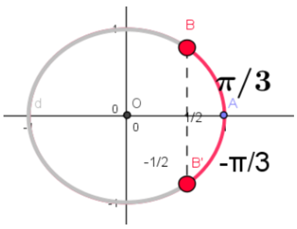
Donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right\}$

2) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :

$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1$?

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x\geq 1\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq 1\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\geq\frac{1}{2}$$

On pose : $X=x+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos X\geq\frac{1}{2}$



$$\cos X\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq X\leq\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leq x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ donc $S_{[-\pi,\pi]}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice37 : 1) a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0\,;2\pi]$

b) résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2)Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

solution: 1) a)on pose $t = \sin x$

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi $2t^2 - 9t - 5 \leq 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \dfrac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\dfrac{1}{2}$ et

$t_2 = \dfrac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ ssi $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ssi $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

ssi $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi; \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq -\dfrac{1}{6} + 2k \leq 2$ Donc $\dfrac{1}{12} \leq k \leq \dfrac{13}{12}$ Donc

$0{,}08 \leq k \leq 1{,}02$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \dfrac{7}{6} + 2k \leq 2$ Donc $-\dfrac{7}{12} \leq k \leq \dfrac{5}{12}$ Donc

$-0{,}5 \leq k \leq 0{,}41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0\,;2\pi]} = \left\{\dfrac{11\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi

$2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

Donc $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$2\left(\sin x + \dfrac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$ ssi $\sin x + \dfrac{1}{2} \geq 0$

ssi $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$ ssi $\sin x \geq \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond a tous les points $M(x)$

tq x vérifie $\sin x \geq -\dfrac{1}{2}$

donc $S = \left[0; \dfrac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

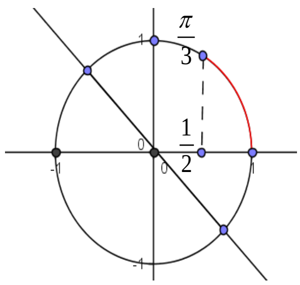
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie

dans $[0\,;\pi]$ ssi $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

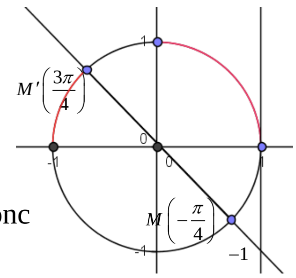
Donc $D = [0\,;\pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \geq 0$ ssi $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x \geq \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq -1$ ssi $\tan x \geq \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$



donc



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		+	0	−		−		−	
$\tan x+1$		+	‖	+		−	0	+	
$(2\cos x-1)(\tan x+1)$		+		−		+	0	−	

$S = \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Exercice38 : 1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leq -\dfrac{1}{2}$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \le 0$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\dfrac{1+\tan x}{\sin 2x} \ge 0$

Exercice39 :

Résoudre dans $[-\dfrac{11\pi}{5}, \dfrac{14\pi}{5}]$ l'équation $\sin 3x \ge \dfrac{1}{2}$

Exercice40 :: soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a)Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations: $A(x)=\dfrac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \le \dfrac{1}{2}$

Solution : 1)

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x\cos 2x - \sin 2x\sin x$$

$$= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^2 x$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

2) $A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x$$

3)a) $A(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \dfrac{1}{8} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Car : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

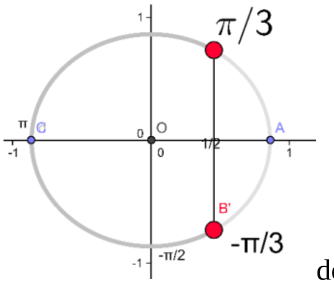
$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi.\pi]} = \left\{-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x) \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4}\right) \le 0$

Puisque : $\Delta \prec 0$ alors $\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{4} \succ 0$

Donc : $A(x) \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \le \cos\dfrac{\pi}{3}$



donc $S = \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Exercice41 : on pose :

$$A = \sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} \times \sin\frac{3\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin\dfrac{\pi}{9} \times \sin\dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \cos\dfrac{5\pi}{9}\right)$

2) monter que : $\cos\dfrac{5\pi}{9} \times \sin\dfrac{2\pi}{9} = \dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{7\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) en déduire que : $A = \dfrac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a \times \sin b = -\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$

1): $\sin\dfrac{\pi}{9} \times \sin\dfrac{4\pi}{9} = -\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{9}\right) - \cos\left(-\dfrac{3\pi}{9}\right)\right)$

$$\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{9}\right)$$

Donc : $\sin\dfrac{\pi}{9} \times \sin\dfrac{4\pi}{9} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \cos\dfrac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a \times \sin b = -\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

$$\cos\frac{5\pi}{9} \times \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $\cos\dfrac{5\pi}{9} \times \sin\dfrac{2\pi}{9} = \dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{7\pi}{9} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) déduction : $A = \dfrac{3}{16}$?

$$A = \left(\sin\frac{\pi}{9} \times \sin\frac{4\pi}{9}\right) \times \sin\frac{2\pi}{9} \times \sin\frac{\pi}{3}$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}\text{ Donc : }A=\frac{3}{16}$$

Exercice 42: soit : $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta=5$

1) monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta=3$

2) déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow3\sin\theta=5-5\cos\theta$

$$\Leftrightarrow3\sin\theta=5(1-\cos\theta)\Leftrightarrow3\sin\theta=5\times2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow3\sin\theta=10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=10\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Car : $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow6\cos\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}\text{ car }\sin\frac{\theta}{2}\neq0$$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$$3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}-\frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}}=\frac{102}{34}=3$$

2)on a le systeme: $\begin{cases}3\sin\theta+5\cos\theta=5\\5\sin\theta-3\cos\theta=3\end{cases}$ on le résolvant on trouve: $\cos\theta=\frac{8}{17}$ et $\sin\theta=\frac{15}{10}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien