النهايات – الإشتقاق
تأويلات هندسية – دراسة الدوال

النهايات

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوجي} \\ -\infty & n \text{ فردي} \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام

4. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**شكل غير محدد**

$\lim f$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	**شكل غير محدد**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب عمودي معادلته** $x = a$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب أفقي معادلته** $y = b$ **بجوار** $+\infty$ **أو بجوار** $-\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0 \Leftrightarrow$ C_f **يقبل مقارب مائل معادلته** $y = ax + b$ **بجوار** $+\infty$ **أو بجوار** $-\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
  - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل
- $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$
  - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب
- $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$
    - C_f يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = ax$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$
    - C_f يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$

الإشتقاق و تأويلاته الهندسية

f قابلة للاشتقاق في a	$\leftrightarrow$	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f'(a)$	$\leftrightarrow$	(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليمين		$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_d'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_d'(a)$ و معادلته : $y=f_d'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a على اليسار		$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in\mathbb{R}$ $l=f_g'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f_g'(a)$ و معادلته : $y=f_g'(a).(x-a)+f(a)$
f قابلة للاشتقاق في a		✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليمين ✓ f قابلة للاشتقاق في a على اليسار ✓ $f_d'(a)=f_g'(a)=f'(a)$		(C_f) يقبل مماسا في النقطة $A(a,f(a))$ معامله الموجه $l=f'(a)$ و معادلته : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

- إذاكانت f قابلة للاشتقاق في a على اليمين و f قابلة للاشتقاق في a على اليسار و $f_d'(a)\neq f_g'(a)$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في a . في هذه الحالة (C_f) يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة $A(a,f(a))$ معاملاهما الموجهان $f_d'(a)$ و $f_g'(a)$ و النقطة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة
- إذا كانت $f'(a)=0$ فإن (C_f) يقبل مماس أفقي في $A(a,f(a))$

$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليمين (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a,f(a))$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty \Leftarrow$ f غير قابلة للاشتقاق في a على اليسار (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a,f(a))$

❖ **مشتقات الدوال الاعتيادية**

الدالة f	الدالة المشتقة f'	المجال I
$x\mapsto k$	$x\mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n \quad n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{-1\}$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$I=]0,+\infty[$ أو $I=]-\infty,0[$
$x\mapsto x^r \quad r\in\mathbb{Q}^*\setminus\{-1\}$	$x\mapsto rx^{r-1}$	$I=]0,+\infty[$
$x\mapsto\sqrt{x}$	$x\mapsto\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$I=]0,+\infty[$
$x\mapsto\frac{1}{x}$	$x\mapsto\frac{-1}{x^2}$	$I=]0,+\infty[$ أو $I=]-\infty,0[$

- ✓ إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق على I و $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن $\alpha.f$ و $f+g$ و $f\times g$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ بالإضافة إذا كانت $g\neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I و $f\geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I
- ✓ إذاكانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f^n $(n\in\mathbb{N})$ قابلة للاشتقاق على I

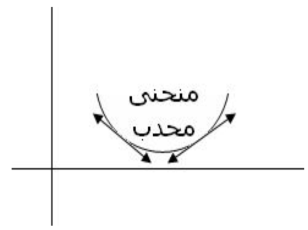
الدالة	الدالة المشتقة
$\alpha.f$	$\alpha.f'$
$f+g$	$f'+g'$
$f\times g$	$f'\times g+f\times g'$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$g\circ f$	$f'\times g'\circ f$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

f^{n}	$nf\,'f^{\,n-1}$

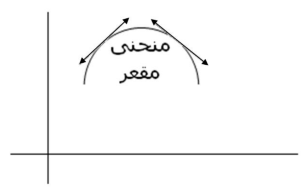
- ✓ إذا كانت $f\,'(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية على I
- ✓ إذا كانت $f\,'(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية على I
- ✓ إذا كانت $f\,'(x)>0$ $\forall x\in I$ فإن f تزايدية قطعا على I
- ✓ إذا كانت $f\,'(x)<0$ $\forall x\in I$ فإن f تناقصية قطعا على I

تقعر منحنى و نقط الانعطاف:

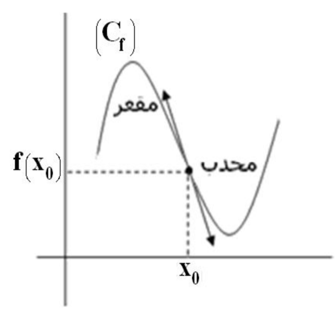
- ✓ إذا كان $f\,''(x)\geq 0$ $\forall x\in I$ فإن (C_f) محدب



- ✓ إذا كان $f\,''(x)\leq 0$ $\forall x\in I$ فإن (C_f) مقعر



- ✓ إذا كانت $f\,''$ تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I\left(a,f(a)\right)$ هي نقطة انعطاف
- ✓ إذا كانت $f\,'$ تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I\left(a,f(a)\right)$ هي نقطة انعطاف



مركز و محور تماثل (C_f) :

❖ المستقيم ذي المعادلة $x=a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : \quad 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : \quad f(2a-x)=f(x) \end{cases}$

❖ النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : \quad 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : \quad f(2a-x)=2b-f(x) \end{cases}$