ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس النهايات

I.نهايات اعتيادية:

- $\lim_{x\to 0} x=0$ • $\lim_{x\to 0} x^2=0$ • $\lim_{x\to 0} x^3=0$
- $\lim_{x\to 0} x^n=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$ • $\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty$ • $\lim_{x\to +\infty} x^n=+\infty\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to -\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي • $\lim_{x\to -\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي
- $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0^+$ • $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0^-$ • $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليمين
- $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول x إلى 0 على اليسار

خاصية : لتكن f دالة عددية و l عددا حقيقيا
إذا كانت f تقبل نهاية l في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

II.النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

- إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليمين
فإننا نكتب : " $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ " أو " $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=l$ "
- إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى l عندما يؤول x إلى a على اليسار
فإننا نكتب : " $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$ " أو " $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=l$ "

نهايات اعتيادية: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{1}{x}=-\infty$ •

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{x^n}=+\infty\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

- إذا كان n زوجي غير منعدم , فان $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$
- إذا كان n فردي غير منعدم , فان $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

مثال: أحسب النهايات التالية:(1 $\lim_{x\to 3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ و $\lim_{x\to 3^-}\frac{3x+1}{2x-6}$

(2 $\lim_{x\to 3^{\pm}}\frac{x-4}{-2x+6}$

أجوبة : (1 $\lim_{x\to 3^+} 3x+1=9+1=10$ و $\lim_{x\to 3^+} 2x-6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$2x-6$	$-$ 0 $+$

ومنه : $\lim_{x\to 3^+} 2x-6=0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$

$\lim_{x\to 3^-} 2x-6=0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$

(2 $\lim_{x\to 3^+} x-4=-1$ و $\lim_{x\to 3^+} -2x+6=0$

x	$-\infty$ 3 $+\infty$
$-2x+6$	$+$ 0 $-$

ومنه : $\lim_{x\to 3^+} -2x+6=0^-$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$

$\lim_{x\to 3^-} -2x+6=0^+$ و بالتالي : $\lim_{x\to 3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$

III.العمليات على النهايات

في كل ما يلي a عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و l و l' عددان حقيقيانو هذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

1) النهاية و الجمع:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}(f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

مثال: أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

الجواب : $\lim_{x\to 0^+} 3x=0$ و $\lim_{x\to 0^+} 7=7$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ **ومنه:**

$\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2)النهاية و الضرب:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ أو $+\infty$	0	
$\lim_{x\to a}(fg)(x)$	$l'.l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

3)النهاية و المقلوب:

$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\in\mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

4)النهاية و الخارج:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$ $l\prec 0$	$+\infty$ $\succ 0$	$+\infty$ $l\succ 0$	$-\infty$ $\prec 0$	$-\infty$		$-\infty$ $+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$\neq 0$	∞	0	0	0	0^+	0^+	0^-	0^-	$\prec 0$		$-\infty$ $+\infty$
$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$		∞	∞	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞	شكل غير محدد	

5)نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim_{x\to +\infty} 3x^2+5x-4$

الجواب: $\lim_{x\to +\infty} 3x^2+5x-4=\lim_{x\to +\infty} 3x^2=+\infty$

6)نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول x إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

مثال : $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^6}{x^4}=\lim_{x\to +\infty} 2x^{6-4}=\lim_{x\to +\infty} 2x^2=+\infty$