تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

## مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

**محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية**

| محتوى البرنامج | القدرات المنتظرة | توجيهات تربوية |
|---|---|---|
| ـ نهايات الدوال $x\to x$ و $x\to x^2$ و $x\to x^3$ ونهايات مقلوباتها في الصفر و $+\infty$ و $-\infty$؛<br>ـ النهاية المنتهية والنهاية اللامنتهية في نقطة وفي $+\infty$ و $-\infty$؛<br>ـ النهاية على اليمين؛ النهاية على اليسار.<br>ـ العمليات على النهايات؛<br>ـ نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية. | ـ التمكن من حساب نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ و $x_0$ | ـ يتم تقديم مفهوم النهاية بطريقة حدسية من خلال سلوك الدوال المرجعية المحددة في البرنامج ومقلوباتها بجوار الصفر و $+\infty$ و $-\infty$ ثم قبول هذه النهايات؛<br>ـ يتم قبول نهايات الدوال الحدودية والدوال الجذرية في $+\infty$ و $-\infty$ وفي نقطة من مجموعة تعريفها؛<br>ـ يتم تحديد $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ في الحالة: $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتان بحث $Q(a)=0$<br>ـ تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها. |

## I نهاية منتهية لدالة نقطة

**مثال1:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=2x$

**الكتابة :** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ تقرأ النهاية عندما يؤول $x$ إلى0 ل $f(x)$

**و لدينا** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 2x=0$

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$

• $\lim\limits_{x\to 0} x^3=0$ • $\lim\limits_{x\to 0} x^n=0$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

**تمرين1:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to -1}\left(3+x-3x^2\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$

**أجوبة:1)** $\lim\limits_{x\to -1} 3+x-3x^2=3+(-1)-3(-1)^2=3+(-1)-3=-1=l$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{3x^2-x}=\frac{5\times 1-1}{3(-1)^2-(-1)}=\frac{4}{3+1}=1=l$

## II نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=x^2$

املأ الجدول التالي :

| $x$ | $10000$ | $100$ | $10$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-10$ | $-100$ | $-10000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | |

نلاحظ أنه عندما تكبر $x$ فان $f(x)$ تكبر أيضا نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

نلاحظ أنه عندما تصغر $x$ فان $f(x)$ تكبر ونكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

**نهايات اعتيادية:**

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ إذا كان $n$ **زوجي** • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$

إذا كان $n$ **فردي**

**تمرين2:** أحسب النهايات التالية **1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9$

**أجوبة:1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^6=+\infty$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2014}=+\infty$

**3)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2015}=-\infty$ **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^9=+\infty$

## III نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي: $f(x)=\frac{1}{x}$

املأ الجدول التالي :

| $x$ | $10000$ | $100$ | $10$ | $2$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $-10$ | $-100$ | $-10000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | | | |

نلاحظ أنه عندما تكبر $x$ فان $f(x)$ تقترب من الصفر

و نكتب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$

نلاحظ أنه عندما تصغر $x$ فان $f(x)$ تقترب من الصفر

نكتب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^-$

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

***خاصية :*** لتكن $f$ دالة عددية و $l$ عددا حقيقيا

إذا كانت $f$ تقبل نهاية $l$ في $+\infty$ (أو في $-\infty$) فان هذه النهاية وحيدة.

**تمرين3:** أحسب النهايات التالية : **1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}$

**الأجوبة :** **1)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0^+$ **2)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^5}=0^-$ **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^7}=0^-$ **4)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}=0^-$ **5)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x^{2009}}=0^+$

## IV. النهاية اللانهائية لدالة في نقطة

**نهايات اعتيادية:**

• $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول $x$ **إلى 0** على اليمين

• $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ وتقرأ النهاية عندما يؤول $x$ إلى 0 على اليسار

**تمرين4:** أحسب النهايات التالية: **1)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ **3)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$ **5)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ **6)** $\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

**الأجوبة :** **1)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ **2)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}=-\infty$ **3)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}+\infty$ **4)** $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}=-\infty$ **5)** $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty$ **6)**

$\lim\limits_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=0+7+\infty=+\infty$

## V النهاية على اليمين والنهاية على اليسار لدالة في نقطة

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=l$ "

▪ إذا كانت $f(x)$ يؤول إلى $l$ عندما يؤول $x$ إلى $a$ على اليسار

**فإننا نكتب :** " $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=l$ " أو " $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=l$ "

**نهايات اعتيادية:** • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{x}=0$ • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

• إذا كان $n$ زوجي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

• إذا كان $n$ فردي غير منعدم , فان $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$

**مثال:** أحسب النهايات التالية: **1)** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}$ **2)** $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-4}$

**أجوبة :** $\lim\limits_{x\to3^+}3x+1=9+1=10$ و $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0$

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-6$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{3x+1}{2x-6}=+\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}2x-6=0^+$

**2)** $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{3x+1}{2x-6}=-\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}2x-6=0^-$

**تمرين5:** أحسب النهايات التالية: **1)** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}$ و $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x-8}{2x-4}$

**2)** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ **3)** $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$

**4)** $\lim\limits_{x\to2^\pm}\frac{5x-20}{-2x+4}$

**أجوبة : 1)** $\lim\limits_{x\to2^+}3x-8=-2$ و $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=-\infty$ **و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}2x-4=0^+$

**و بالتالي :** $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{3x-8}{2x-4}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to2^-}2x-4=0^-$

**2)** $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0$ و $\lim\limits_{x\to3^+}x-4=-1$

| $x$ | $-\infty$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+6$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}=+\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^+}-2x+6=0^-$

$\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}=-\infty$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to3^-}-2x+6=0^+$

**3)** $\lim\limits_{x\to-2^\pm}\frac{-5x^2+1}{x+2}$

**لدينا** $\lim\limits_{x\to-2^+}-5x^2+1=-19$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}x+2=0$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{-5x^2+1}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{-5x^2+1}{x+2}=-\infty$

**4) لدينا** $\lim\limits_{x\to2^+}-2x+4=0$ و $\lim\limits_{x\to2^+}5x-20=-10$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2x+4$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{5x-20}{-2x+4}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{5x-20}{-2x+4}=+\infty$

**تمرين6:** أحسب النهايات التالية:

**1)** $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x+1}{3x-9}$ **2)** $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x+1}{3x-9}$ **3)** $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x-4}{-2x+8}$

**4)** $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x-4}{-2x+8}$

## VI. العمليات على النهايات

في كل ما يلي $a$ عدد حقيقي أو يساوي $+\infty$ أو $-\infty$ و $l$ و $l'$ عددان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

### 1. النهاية و الجمع:

Talamidi.com تم تحميل هذا الملف من موقع

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ | $l'+l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | شكل غير محدد | |

**مثال:** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x+7+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 0^+} 3x=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} 7=7$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ **ومنه:**

$$\lim_{x\to 0^+} 3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

## 2. النهاية و الضرب:

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l>0$ | $l<0$ | $l>0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ أو $+\infty$ | $0$ | |
| $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ | $l\,l'$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد | | |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4$ و 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\dfrac{1}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

**أجوبة :1)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4=5\times(+\infty)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-x=\lim_{x\to+\infty} x(x-1)$$

**لدينا :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$ **ومنه :**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)^{2008}\times\left(x^3+1\right)^{2009}=-\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0^-$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$\infty\times 0$

نرفع ال ش غ م مثلا بالنشر : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)\times\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\dfrac{1}{x}=-\infty+0=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$ نحصل عن شكل غ محدد من قبيل :

$+\infty-\infty$

نرفع ال ش غ م مثلا بالتعميل : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)=+\infty$

## 3. النهاية و المقلوب:

| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $l'\in\mathbb{R}^*$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{1}{g}\right)(x)$ | $\dfrac{1}{l'}$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3x+7}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$

**أجوبة :1)** لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3x+7}=\dfrac{1}{7}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3x+7}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+7}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x^2}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0^+$ **ومنه :** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$

## 4. النهاية و الخارج:

| $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ | $l$ | $l$ | $-\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ $l<0$ | $+\infty$ $>0$ | $+\infty$ $l>0$ | $-\infty$ $<0$ | $-\infty$ | | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ | $\neq 0$ | $\infty$ | $-0$ | $-0$ | $\infty$ | $0^+$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^-$ | $<0$ | | $-\infty$ $+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ | $\dfrac{l}{l'}$ | | $-\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | شكل غير محدد | |

**أمثلة:** أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

**أجوبة :1)** لدينا : $\lim\limits_{x\to 4} 4x-5=11$ و $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4x-5}{\sqrt{x}}=\dfrac{11}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ **لدينا :** $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4=0$ و $\lim\limits_{x\to 2} x-2=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4$$

**تمرين7:** أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+3}}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-9}$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

**أجوبة :** 1) **لدينا :** $\lim\limits_{x\to 1} 2x-6=-4$ و $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{4}{2}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to 3} x^2-9=0$ و $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 2} x+3=4$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 4x^2-1=0$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} 2x-1=0$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل : $\dfrac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x)^2-1^2}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}} 2x+1=2$$

## 5. نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4$

**الجواب:** $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+5x-4=\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2=+\infty$

## 6. نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول $x$ إلى $+\infty$ أو إلى $-\infty$ هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

**مثال :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$

الجواب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6}{x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^{6-4}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

**تمرين8:** أحسب النهايات التالية :1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+5x-9x^2$

تم تحميل هذا الملف من موقع Talamidi.com

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(-5x^3-4x+12\right)$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}$ 5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}$ 7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}$

**أجوبة :** 1) $\lim_{x\to+\infty}1+5x-9x^2=\lim_{x\to+\infty}-9x^2=-\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty}-5x^3-4x+12=\lim_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5+3x^2+x}{-10x^5-x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^5}{-10x^5}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6+2x^2+1}{x^3+3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^6}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=+\infty$

5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3-7x^2+x}{10x^4-3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20x^3}{10x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{20}{10x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0^-$

6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4x^2+1}{x^8-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=0^+$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$

**تمرين9:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}-5x^2+3x+4$ 2) $\lim_{x\to-\infty}-6x^3-7x+2$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{4x^3+5x-1}$ 4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+x^2+2}{x^3+x-3}$

## 7. نهاية الدوال اللاجذرية

**خاصية:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال على الشكل $[a;+\infty[$ بحيث $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a;+\infty[$

- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l}$
- إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $l\geq 0$ فان $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

**أمثلة :** 1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}$ 2) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$

**أجوبة :** 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}=\sqrt{3\times2^2+4}=\sqrt{16}=4$

**تمرين10:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to3}\sqrt{3x^2+22}$

2) $\lim_{x\to1}\left|-x^2+2x-7\right|\times\sqrt{x+1}$

## تمارين للبحث

**تمرين1:** أحسب النهايات التالية : 1) $\lim_{x\to-1}3+x-3x^2$

2) $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{3x^2-x}$ 3) $\lim_{x\to2}\sqrt{3x^2+4}$

4) $\lim_{x\to2}\left|-x^2+2x-7\right|\times\sqrt{x+7}$ 5) $\lim_{x\to2}\frac{3x^2+3x+6}{5x-1}$

6) $\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{5x-1}{2x^2-x}}$ 7) $\lim_{x\to2}\sqrt{\frac{3}{2}x^3+4}$ 8) $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x-1}$

**تمرين2:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0^+}\frac{2}{x}$ 2) $\lim_{x\to0^-}\frac{-5}{x^3}$ 3) $\lim_{x\to0^+}\frac{9}{x^5}$ 4) $\lim_{x\to0^-}\frac{-12}{x^4}$

5) $\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x\to0^+}3x+7+\frac{1}{\sqrt{x}}$

7) $\lim_{x\to0^+}\frac{-3}{x}$ 8) $\lim_{x\to0^-}\frac{4}{x^3}$ 9) $\lim_{x\to0^+}\frac{-8}{x^5}$ 10) $\lim_{x\to0^-}\frac{3}{x^4}$

11) $\lim_{x\to0^+}\frac{3}{\sqrt{x}}$ 12) $\lim_{x\to0^+}-5x+1-\frac{1}{\sqrt{x}}$

**تمرين3:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}$ 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-7}{x}$ 3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}$ 5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^5}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{12}{x^2}$

7) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}$ 8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}$ 9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{x^2}$

10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}$ 11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^5}$ 12) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x^2}$

**تمرين4:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}3x^2$ 2) $\lim_{x\to+\infty}-5x^2$ 3) $\lim_{x\to-\infty}2x^4$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{2}x^2$ 5) $\lim_{x\to+\infty}8x^5$ 6) $\lim_{x\to-\infty}-3x^5$

7) $\lim_{x\to+\infty}-6x^4$ 8) $\lim_{x\to-\infty}-4x^4$ 9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{3}x^3$

10) $\lim_{x\to+\infty}-7x^9$ 11) $\lim_{x\to+\infty}3x^3+\frac{2}{x}-3$ 12)

13) $\lim_{x\to-\infty}7x^3+\frac{1}{x}+2$ $\lim_{x\to-\infty}2x^5+\frac{-7}{x}+1$

**تمرين5:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}-5x^2+3x+4$ 2) $\lim_{x\to-\infty}-6x^3-7x+2$

3) $\lim_{x\to+\infty}-6x^5+7x+9$ 4) $\lim_{x\to+\infty}x^3-x+9$

5) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2+2}{4x^3+5x-1}$ 6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2}{x^4+x-1}$

7) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^7+x^2+2}{x^3+x-3}$ 8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{10x^7+x}{5x-1}$

9) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^8-x}{9x^4-1}$ 10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x+2}{x^4+2x+6}$

**تمرين6:** أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

4) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ 5) $\lim_{x\to10}\frac{x^2-100}{x-10}$

6) $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ 7) $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$

8) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-4x+3}$ 9) $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x-3}$ 10) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{x}$

**تمرين7:** أحسب النهايات التالية:1) $\lim_{x\to2^+}\frac{3x+1}{2x-4}$ و $\lim_{x\to2^-}\frac{3x+1}{2x-4}$

2) $\lim_{x\to3^+}\frac{x-4}{-2x+6}$ و $\lim_{x\to3^-}\frac{x-4}{-2x+6}$ 3) و 4) $\lim_{x\to1^+}\frac{-3x+1}{2x-2}$