# ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

## ملخص درس عموميات حول الدوال

### I.تذكير

**1)مجموعة تعريف دالة عددية:**

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$.

مجموعة تعريف الدالة $f$ هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية $x$ بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز $D_f$ بمعنى: $x\in D_f$ تكافئ $f(x)\in\mathbb{R}$.

**مثال:** حدد مجموعة تعريف الدالة $f$ في الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$ (2 $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{4x-12}$

3) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$ (4 $f(x)=\sqrt{-3x+6}$

**الجواب:** 1) $f(x)=x^3-3x^2-5x+10$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{4x-12}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x-12\neq 0\}$

$4x-12=0$ يعني $4x=12$ يعني $x=3$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

3) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$ يعني

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-5$ و $c=-3$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ و $x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

4) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$ يعني $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ يعني $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ يعني $-3x\geq -6$ يعني $x\leq 2$ ومنه

$D_f=]-\infty;2]$

**2)زوجية دالة عددية:**

**مثال:** أدرس زوجية الدالة $f$ في الحالات التالية: 1) $f(x)=3x^2$

2) $f(x)=\dfrac{4}{x}$

**الأجوبة :** 1) $f(x)=3x^2$

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

أ) لكل $x$ من $D_f=\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f=\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=3(-x)^2=3x^2=f(x)$ ومنه $f$ دالة زوجية

2) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ $D_f=\mathbb{R}^*$

أ) لكل $x$ من $D_f=\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $D_f=\mathbb{R}^*$

ب) $f(-x)=\dfrac{4}{-x}=-\dfrac{4}{x}=-f(x)$ ومنه $f$ دالة فردية

**التأويلات المبيانية:** لتكن $f$ دالة عددية لمتغير $x$ حقيقي و $C_f$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- ❖ تكون $f$ دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى $C_f$.
- ❖ تكون $f$ دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى $C_f$.

### II.الدالة المكبورة والدالة المصغورة والدالة المحدودة

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ من $\mathbb{R}$.

- نقول إن $f$ دالة مكبورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $M$ بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\leq M$
- نقول إن $f$ دالة مصغورة على مجال $I$ إذا وجد عدد حقيقي $m$ بحيث : $\forall x\in I\quad f(x)\geq m$
- نقول إن $f$ دالة محدودة على مجال $I$ إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال $I$.

**مثال1:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+5$

بين أن الدالة $f$ مصغورة بالعدد 4

**الجواب :** يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

اذن نحسب الفرق : $f(x)-4=x^2-2x+5-4=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ 4\leq f(x)$

وبالتالي $f$ مصغورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 4

**مثال2:** نعتبر الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x)=-2x^2+4x+1$

بين أن الدالة $f$ مكبورة بالعدد 3

**الجواب :** يكفي أن نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$

اذن نحسب الفرق : $3-f(x)=3-(-2x^2+4x+1)=3+2x^2-4x-1$

$3-f(x)=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0$

ومنه : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\leq 3$ وبالتالي $f$ مكبورة على $\mathbb{R}$ بالعدد 3

### III.مطاريف دالة عددية

**تعريف:** لتكن $f$ دالة عددية معرفة على مجال $I$ و $a$ عنصرا من المجال $I$

- ▪نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان : $\forall x\in I\quad f(x)\leq f(a)$
- ▪نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة $f$ على المجال $I$, إذا كان : $\forall x\in I\quad f(x)\geq f(a)$

### IV.مقارنة دالتين

**تعريف1:** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين و $D_f$ و $D_g$ على التوالي مجموعة تعريفهما.

نقول إن $f$ تساوي $g$ ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان :

$D_g=D_f$ و $f(x)=g(x)\quad(\forall x\in D_f)$

**تعريف2:** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجال $I$ .
نقول إن $f$ أصغر من أو يساوي $g$ على مجال $I$ ونكتب $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$$

**التأويل الهندسي :** $f \leq g$ على مجال $I$ يعني هندسيا أن منحنى الدالة $f$ يوجد تحت منحنى الدالة $g$ على المجال $I$ .

**ملحوظة :**

- $f < g$ على المجال $I$
  إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I)\ f(x) < g(x)$
- $f \geq 0$ على المجال $I$
  إذا وفقط إذا كان : $(\forall x \in I)\ f(x) \geq 0$

## V.رتابة دالة عددية

- يمكن دراسة رتابة دالة $f$ على مجال $I$ بدراسة إشارة معدل التغير : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
  مع $x_1$ و $x_2$ عنصرين مختلفين من $I$
- نقول إن $f$ دالة رتيبة على $I$ إذا كانت $f$ تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على مجال $I$ .

**مثال1:** لتكن الدالة $f$ المعرفة كالتالي : $f(x) = 4x - 3$
1) حدد $D_f$ 2) أدرس رتابة $f$ 3)حدد جدول تغيرات الدالة $f$

**أجوبة :** 1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$
نحسب معدل تغير الدالة $f$ : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(4x_2-3)-(4x_1-3)}{x_2-x_1} = \frac{4x_2-4x_1}{x_2-x_1} = \frac{4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T = 4 \geq 0$ وبالتالي الدالة $f$ تزايدية على $\mathbb{R}$

3)جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | |

**مثال2:** لتكن الدالة $g$ المعرفة كالتالي : $g(x) = -3x + 2$
1) حدد $D_g$ 2) أدرس رتابة $g$ 3)حدد جدول تغيرات الدالة $g$

**أجوبة :** 1) $D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$
نحسب معدل تغير الدالة $g$ : $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}$

$$\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(-3x_2+2)-(-3x_1+2)}{x_2-x_1} = \frac{-3x_2+3x_1}{x_2-x_1} = \frac{-3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

ومنه : $T = -3 \leq 0$ وبالتالي الدالة $g$ تناقصية على $\mathbb{R}$

3)جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | |

**مثال3:** لتكن $f$ دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2$ .
1) حدد $D_f$ 2) أدرس زوجية الدالة $f$
3)أحسب معدل تغير الدالة $f$
4)أدرس رتابة $f$ على كل من المجالين $[0;+\infty[$ و $]-\infty;0]$
5)وحدد جدول تغيرات الدالة $f$ .
6)حدد مطا ريف الدالة $f$
7)أرسم التمثيل المبياني للدالة $f$

**أجوبة :** 1) $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) لكل $x$ من $\mathbb{R}$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}$ .
ب) $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$
ومنه $f$ دالة زوجية

3)حساب معدل تغير الدالة $f$

$$T = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{2x_2^2 - 2x_1^2}{x_2-x_1} = \frac{2(x_2^2 - x_1^2)}{x_2-x_1}$$

$$T = \frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = 2(x_2+x_1)$$

4) أ) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $[0;+\infty[$ :
ليكن : $x_1 \in [0;+\infty[$ و $x_2 \in [0;+\infty[$
اذن $T = 2(x_2+x_1) \geq 0$
ومنه الدالة $f$ تزايدية على $[0;+\infty[$

ب) دراسة رتابة الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0]$ :
ليكن : $x_1 \in ]-\infty;0]$ و $x_2 \in ]-\infty;0]$
اذن $T = 2(x_2+x_1) \leq 0$
ومنه الدالة $f$ تناقصية على $]-\infty;0]$

5)حدد جدول تغيرات الدالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

6) $f$ تقبل قيمة دنيا عند $x_0 = 0$

7) رسم التمثيل المبياني للدالة $f$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 2 | 8 | 18 |